

پردازش تصاویر دیجیتال (بخش چهارم)

فضای تبدیل



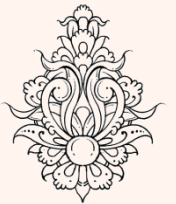
دانشگاه شهید بهشتی

پاییز ۱۴۰۲

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- پردازش تصویر در فضای تبدیل (فرکانسی)
- تبدیل‌های خطی
 - مرور برخی مفاهیم پایه
 - تبدیل‌های یک‌بعدی
 - بردارهای پایه
 - بردارهای متعامد یک‌
 - تبدیل‌های یکانی
- تبدیل‌های دوبعدی
 - تبدیل‌های جدایی‌پذیر
 - تصاویر پایه



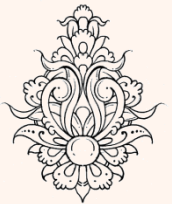
چرا تبدیل؟

- سیگنال اصلی در حوزه‌ی زمانی-مکانی دارای همبستگی بین نمونه‌ها (پیکسل‌ها) می‌باشد.
- برای محاسبه و پردازش نیاز به روابطی چون کانولوشن است که پیچیدگی بالایی دارد.
- هدف از تبدیل

– از میان بردن همبستگی میان نمونه‌ها

– تبدیل روابطی چون کانولوشن به ضرب در حوزه‌ی تبدیل

– استفاده از داده‌ی تبدیل یافته در سنجش برخی کمیت‌ها



فضای برداری

- یک فضای برداری شامل مجموعه‌ای بردار «مستقل خطی» است.
- بردارهای فضای مذکور توسط «ترکیب خطی» از آن مجموعه قابل ساخت است.
- مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای یکه

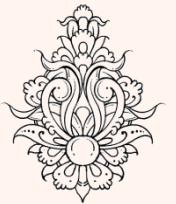
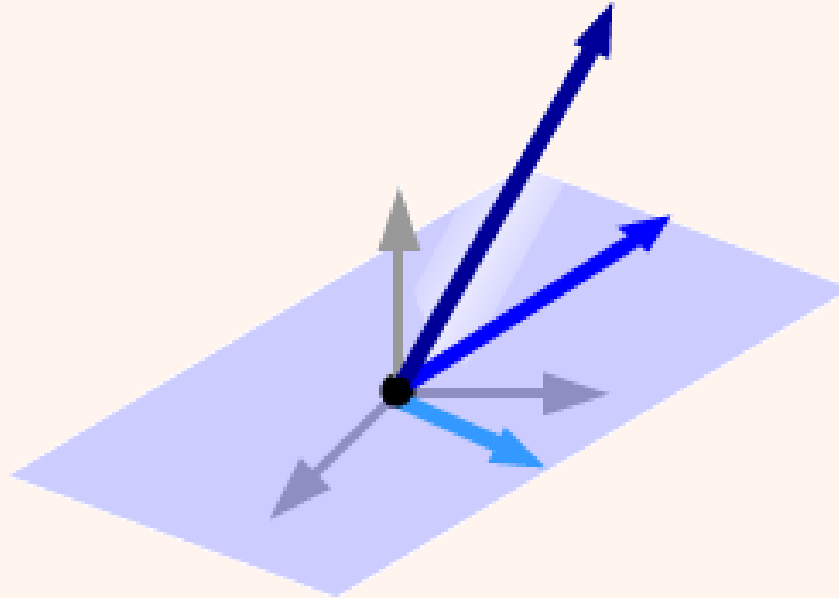
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



استقلال خطی

- اگر بردارهای یک فضا در نظر گرفته شوند، در صورتی که «مستقل خطی» باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_i a_i v_i = 0, \text{ iff } a_i = 0, \forall i$$



نکات

- اگر v_i ها «بردارهای پایه» باشند، هر برداری مانند v از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall v \neq 0, \sum_i b_i v_i = v, \exists b_i \neq 0$$

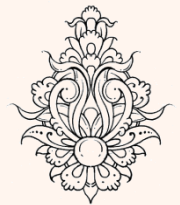
- اگر بردارهای پایه متعامد باشند، فضای برداری را متعامد گویند:

orthogonal

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ \|v_i\|^2 & \text{for } i = j \end{cases}$$

اگر اندازه‌ی بردارها به مقدار یک نرمالیزه گردد، یک فضای متعامد نرمال ایجاد می‌شود.

orthonormal



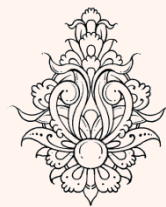
تبدیل در فضای یک‌بعدی

برای سادگی بیشتر، نخست به بررسی تبدیلهای در فضای یک‌بعدی خواهیم پرداخت:

$$x(n) \rightarrow X(K)$$
$$0 \leq n \leq N-1 \quad 0 \leq K \leq N-1$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

$$0 \leq K \leq N-1$$

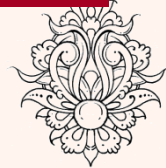


تبدیل در فضای یک بعدی (ادامه...)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n)x(n) \quad 0 \leq K \leq N-1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X_{N \times 1} = A_{N \times N} x_{N \times 1}$$



تبدیل معکوس

• اگر داشته باشیم:

$$X = Ax$$

- می‌توان ماتریس B را به گونه‌ای در نظر گرفت که بتوان بردار x را از X تخمین زد:

$$\tilde{x} = B.X$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- چنانچه ماتریس A وارون‌پذیر باشد، $B=A^{-1}$ ، می‌توان با تبدیل وارون به مقدار اصلی x دست یافت.



ویژگی‌های ماتریس تبدیل

• اگر A ماتریسی مختلط باشد، مزدوج-ترانهادهی A را به صورت زیر نشان می‌دهند:

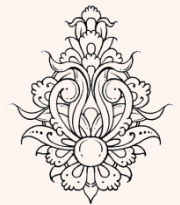
$$A^{*T}$$

• مثال:

• اگر A را به صورت زیر داشته باشیم مزدوج-ترانهادهی آن را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 + 7i & 0 \\ 2i & 4 - i \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{3 + 7i} & \bar{0} \\ \overline{2i} & \overline{4 - i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 7i & 0 \\ -2i & 4 + i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 7i & -2i \\ 0 & 4 + i \end{bmatrix}$$



ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n)x(n)$$

• در ماتریس‌های متعامد، ترانزپوز و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟



$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$AA^T = ?$$

$$A$$



ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

• در ماتریس‌های متعامد، ترانزاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$A^T = A^{-1}$$

• ماتریس یکانی

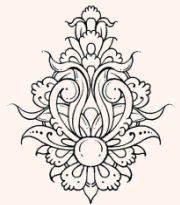
• هنگامی که A^{*T} و معکوس یک ماتریس با هم برابر باشد یک «ماتریس یکانی» خواهیم داشت.

Unitary

$$A^{*T} = A^{-1}$$

نتیجه

$$A^{*T} \triangleq A^H$$



مثال

• نشان دهید ماتریس A یکانی است.

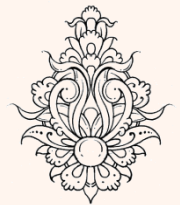
$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$A A^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I_2$$

و ماتریس یکانی است.

$$A^{*T} = A^{-1}$$

• پس



معکوس تبدیل یکانی

- اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، با در نظر گرفتن $B=A^{-1}$ می‌توان به گونه‌ی یکتا به ماتریس B و تبدیل معکوس دست یافت.
- اگر ماتریس A ماتریسی یکانی باشد، در این حالت تبدیل به‌دست آمده یکانی است.
- روابط تبدیل و معکوس آن به صورت زیر است:

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K)$$

$$A^{*T} = A^{-1}$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} a^*(K, n) X(K)$$



$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

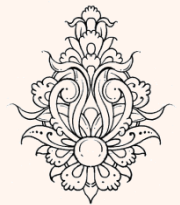
تبدیل

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K)$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} a^*(K, n) X(K)$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & \cdot & \alpha_{N-1,0} \\ \alpha_{0,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0,N-1} & \alpha_{1,N-1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

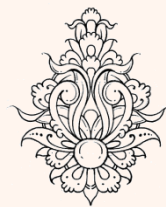


خصوصیات تبدیل یکانی

- تمامی مقادیر ویژهی ماتریس A دارای اندازهی یک هستند.
- انرژی بردار اصلی و تبدیل یافته یکسان است.

$$\|X\|^2 = (A.x)^H . A.x = x^H . A^H . A.x = \|x\|^2$$

- مقادیر اصلی همبستگی بالا و مقادیر تبدیل یافته ناهمبسته اند.



تبدیل دو بعدی

$$f(n_1, n_2) \xrightarrow{\quad\quad\quad} F(K_1, K_2)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1 \quad 0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2)$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

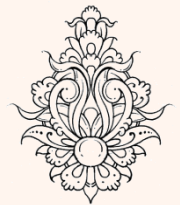


تبدیل معکوس

$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t_{b_{n_1, n_2}}(K_1, K_2)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1$$

t_f و t_b نشان‌دهنده‌ی تبدیل رو به جلو و رو به عقب هستند، که به تمامی ضرایب K_1, K_2, n_1, n_2 وابسته‌اند.



تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر بتوان تبدیلی را به صورت زیر نوشت، آن را «جدایی‌پذیر» می‌گویند:

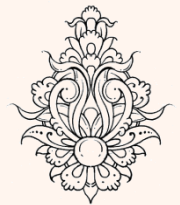
$$t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2) = t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

- اگر دو بخش با هم برابر باشند، تبدیل را «متقارن» گویند.
- اگر تبدیلی جدایی‌پذیر و متقارن باشد، نحوه‌ی نمایش ماتریسی را به‌گونه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$F = T_f \times f \times T_f^T$$

- برای معکوس تبدیل (حقیقی) نیز خواهیم داشت:

$$f = T_b F T_b^T$$



تبدیل جدایی‌پذیر متقارن

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2)$$

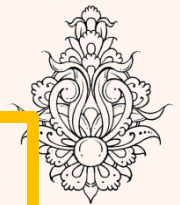
$$t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2) = t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} t_{1f_{K_1}}(n_1) \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

اعمال تبدیل روی ستون‌ها

اعمال تبدیل روی سطرها



تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر داشته باشیم:

$$F = T_f f T_f^T \quad T_f^{-1} = T_f^{*T}$$

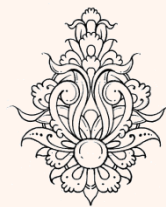
- تبدیل دو بعدی یکانی خواهیم داشت، در این حالت با صرف نظر کردن از اندیس‌های f و b داریم:

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

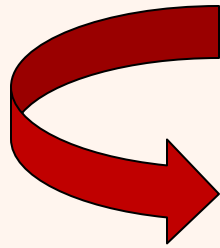
$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t_{K_1, K_2}^*(n_1, n_2)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1$$



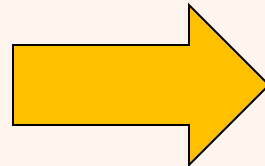
تبدیل معکوس

$$F = T f T^T \quad T^{-1} = T^{*T}$$

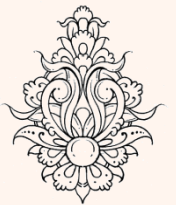


$$T^{*T} . F . T^{T^{*T}} = T^{*T} . T . f . T^T . T^{T^{*T}}$$
$$T^{*T} . F . T^* = f$$

$$F = T . f . T^T$$



$$f = T^{*T} . F . T^*$$

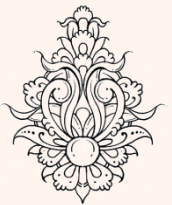


انرژی در حوزه تبدیل

- مقدار انرژی در ماتریس اصلی و ماتریس انتقال یافته یکسان است.

$$\sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \|f(n_1, n_2)\|^2 = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} \|F(K_1, K_2)\|^2$$

- توزیع انرژی در ماتریس نتیجه شده بسته به نوع انتقال می‌تواند متفاوت باشد.
- به بیانی دیگر تمرکز انرژی بسته به تبدیل در محدوده‌ی خاصی قرار می‌گیرد.



تصاویر پایه

Basis Images

2	-1
5	6

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + -1 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بردار یکم محور اول

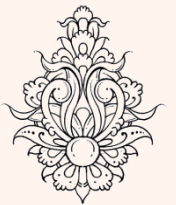
بردار یکم محور دوم

بردار یکم محور سوم

بردار یکم محور چهارم

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

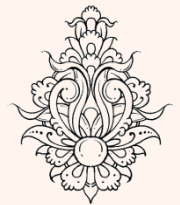


تصاویر پایه (ادامه...)

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$
$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

- اگر مقادیر K_1 و K_2 را ثابت در نظر بگیریم برای تمامی مقادیر n_1 و n_2 جمع صورت می‌پذیرد.

$$A_{n_1, n_2} = t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$
$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} (f(n_1, n_2) \cdot A_{n_1, n_2})$$



تصاویر پایه (ادامه...)

- نتیجه‌ی به دست آمده همان ضرب داخلی دو ماتریس است که حاصلی اسکالر دارد.

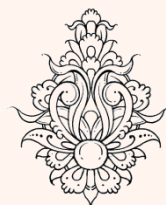
$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} (f(n_1, n_2) \times A_{K_1, K_2}(n_1, n_2)) = \langle f, A_{K_1, K_2} \rangle$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N-1$$

$$F = T \cdot f \cdot T^T$$

- ماتریس A به دست آمده نتیجه‌ی ضرب خارجی K_1 امین ستون ماتریس T^T در ترانهاده‌ی K_2 امین ستون T است:

$$A_{K_1, K_2} = \tau_{K_1(N \times 1)} \times \tau_{K_2(1 \times N)}^T$$



$$F = T \times f \times T^T$$

با مشخص بودن تصویر پایه می‌توان دید شهودی بهتری نسبت تبدیل مورد نظر داشت.

$$F_{k_1, k_2} = \tau_{K_1(1 \times N)}^T \times f_{(N \times N)} \times \tau_{K_2(N \times 1)}$$

$$F_{k_1, k_2} = \langle f, A_{k_1, k_2} \rangle$$

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_{0,0} & \cdot & \alpha_{k_2,0} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\
 \alpha_{1,0} & \cdot & \alpha_{k_2,1} & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{2,0} & \cdot & \alpha_{k_2,2} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \cdot & \alpha_{k_2,N-1} & \cdot & \alpha_{N-1,N-1}
 \end{bmatrix}$$

سطر k_1

$$\tau_{K_1(1 \times N)}^T$$

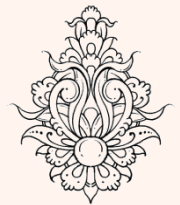
T

f

T^T

ستون k_2

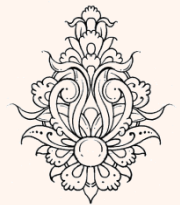
$$\tau_{K_2(N \times 1)}$$



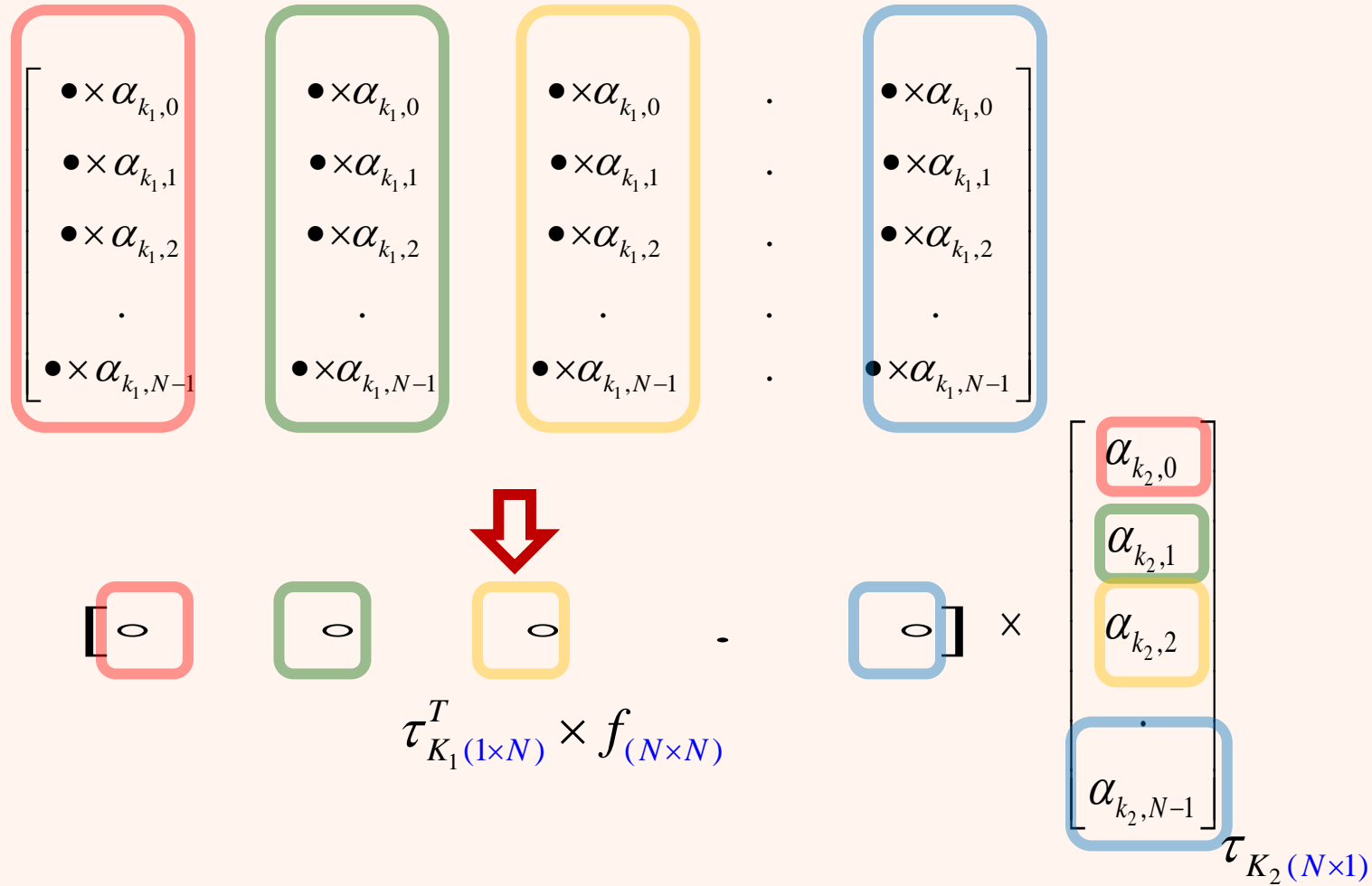
$$\tau_{K_1(1 \times N)}^T \times f_{(N \times N)}$$

$$\begin{array}{c}
 \tau_{K_1(1 \times N)}^T \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} \tau_{K_1(1 \times N)}^T \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} \end{array} \right] \end{array}} \right]$$

T
 f

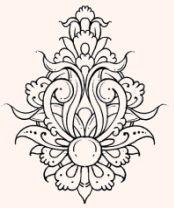


Sum up of all elements of a each column



$$\begin{bmatrix} \circ \times \alpha_{k_2,0} & \circ \times \alpha_{k_2,1} & \circ \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \circ \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{k_1, k_2}$$



$F_{k_1, k_2} :$

Sum up of all elements

$$\begin{bmatrix} \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

Dot product

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix}$$

A_{k_1, k_2}

f



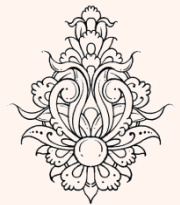
$$F_{k_1, k_2} = \langle f, A_{k_1, k_2} \rangle$$

$A_{k_1, k_2} :$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \\ \alpha_{k_1,1} \\ \alpha_{k_1,2} \\ \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{K_1, K_2} = \tau_{K_1(N \times 1)} \times \tau_{K_2(1 \times N)}^T$$



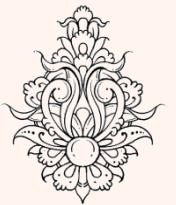
مثال

$$F(0,0) = \langle f, A_{0,0} \rangle$$

$$F(5,6) = \langle f, A_{5,6} \rangle$$

هر عنصر از F را می‌توان با محاسبه‌ی ضرب داخلی ماتریس f در ماتریس متناظر A محاسبه نمود.

تصاویر پایه نامیده می‌شوند. A_{K_1, K_2}



مثال

• اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = T f T^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



تصاویر پایه

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \Rightarrow T^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \langle f, A_{0,0} \rangle & \langle f, A_{0,1} \rangle \\ \langle f, A_{1,0} \rangle & \langle f, A_{1,1} \rangle \end{bmatrix}$$



مثال

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

• اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$A_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

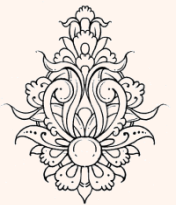
$$F_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1+2+3+4)/2 = 5$$

$$F_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (1+3-2-4)/2 = -1$$

$$F_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = (1+2+-3-4)/2 = -2$$

$$F_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (1+4-2-3)/2 = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



دانشگاه
تهران

- Fundamentals of digital image processing
Book by Anil Kumar Jain

