معماری کامپیوتر

۱۳۹۵-۱۱-۱۳

جلسه‌ی یازدهم

دانشگاه شهید بهشتی

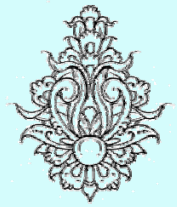
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

بهار ۱۳۹۵

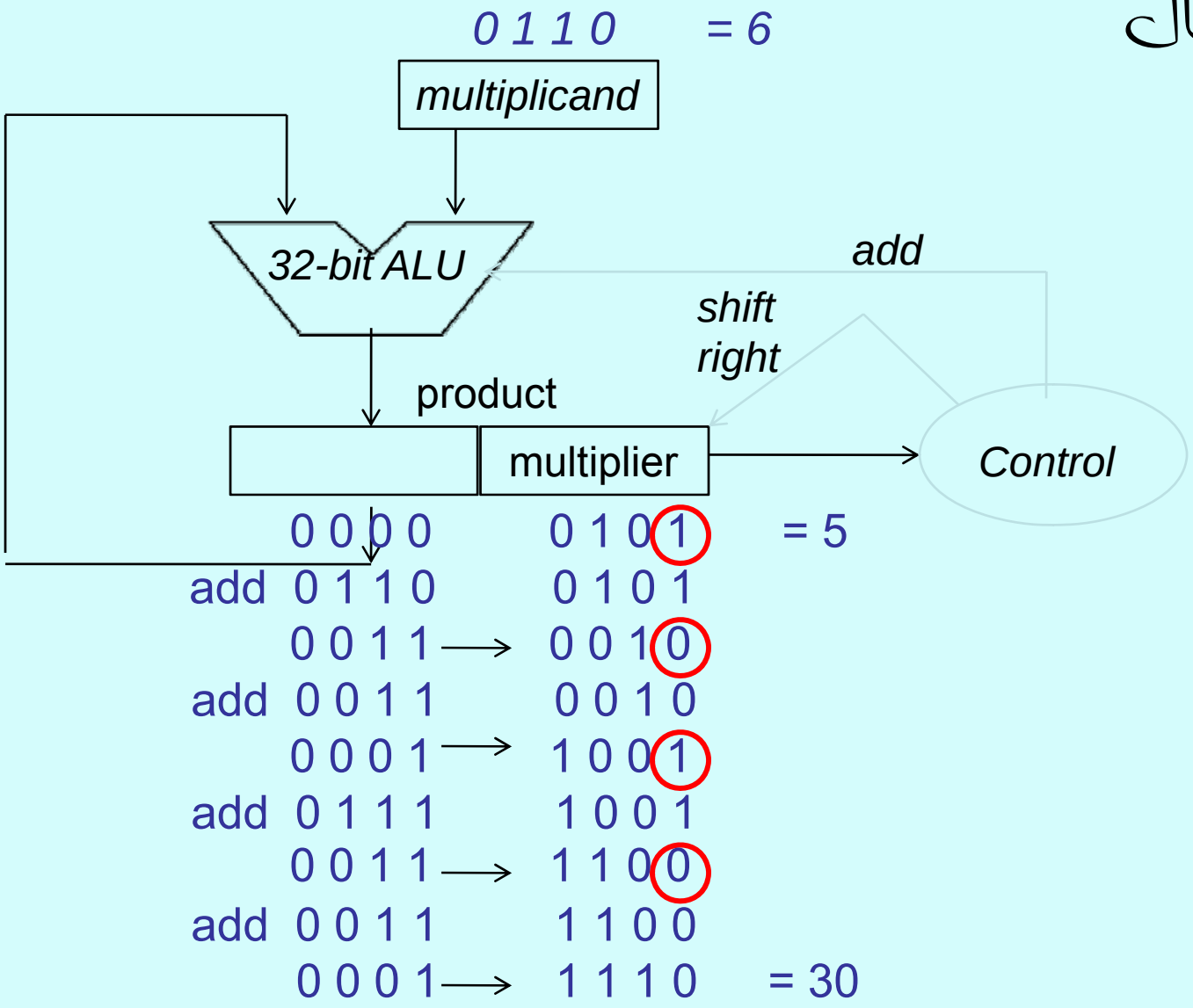
احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

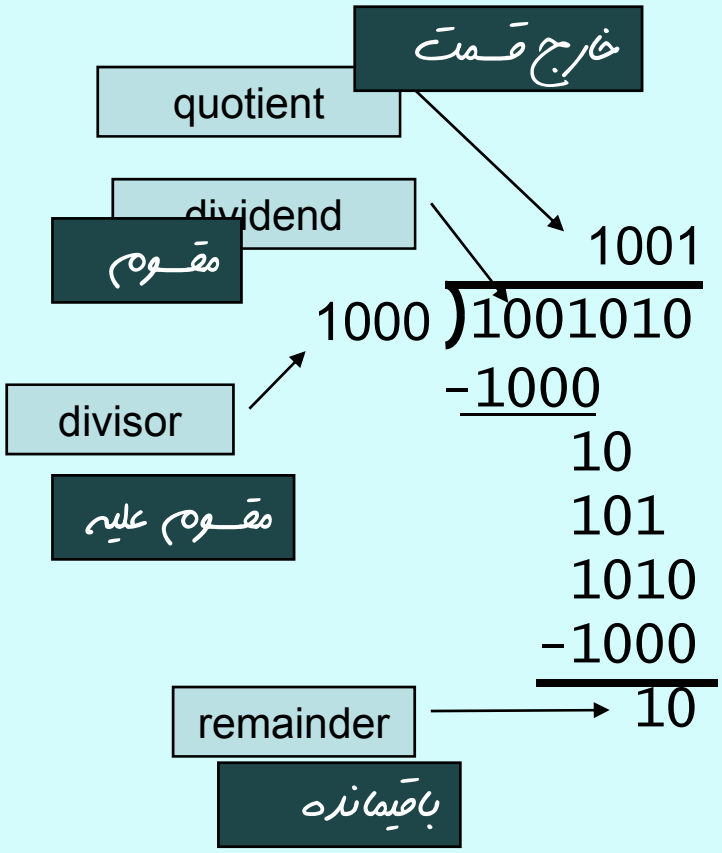
- مروری بر جلسه‌ی پیش
- تقسیم‌کننده‌ها

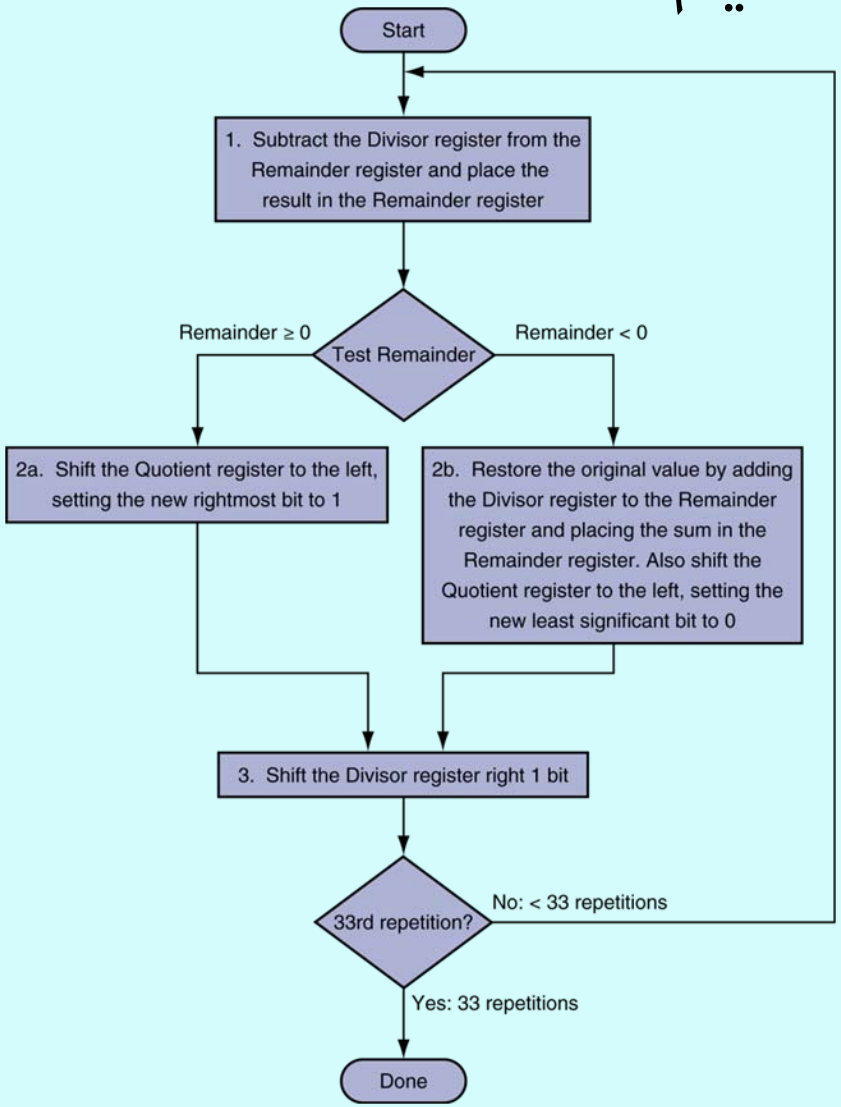


مثال


0 1 1 0 = 6
multiplicand
32-bit ALU
add
shift
right
product
multiplier
Control
0 0 0 0 0 1 0 1 = 5
add 0 1 1 0 0 1 0 1
0 0 1 1 → 0 0 1 0
add 0 0 1 1 0 0 1 0
0 0 0 1 → 1 0 0 1
add 0 1 1 1 1 0 0 1
0 0 1 1 → 1 1 0 0
add 0 0 1 1 1 1 0 0
0 0 0 1 → 1 1 1 0 = 30

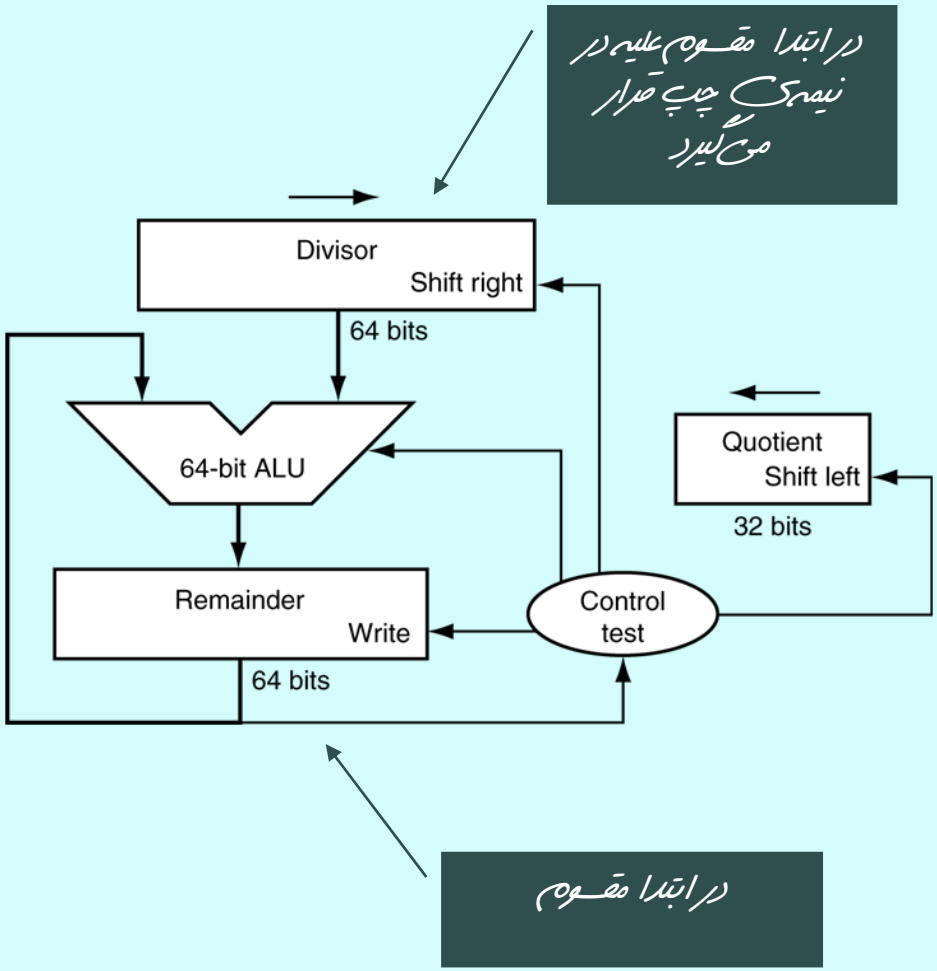
تقسیم



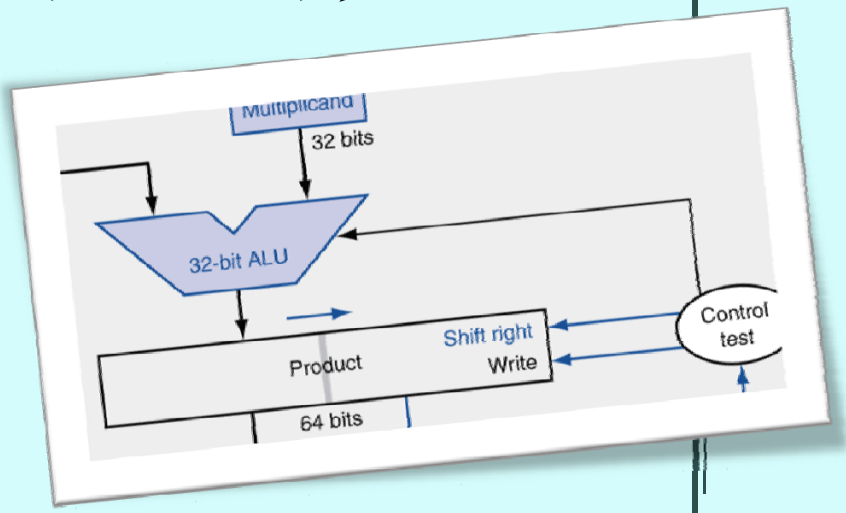


Dividend=Quotient X Divisor + Reminder

سخت‌افزار تقسیم



سخت‌افزار بهینه‌سازی شده



Divisor

32 bits

32-bit ALU

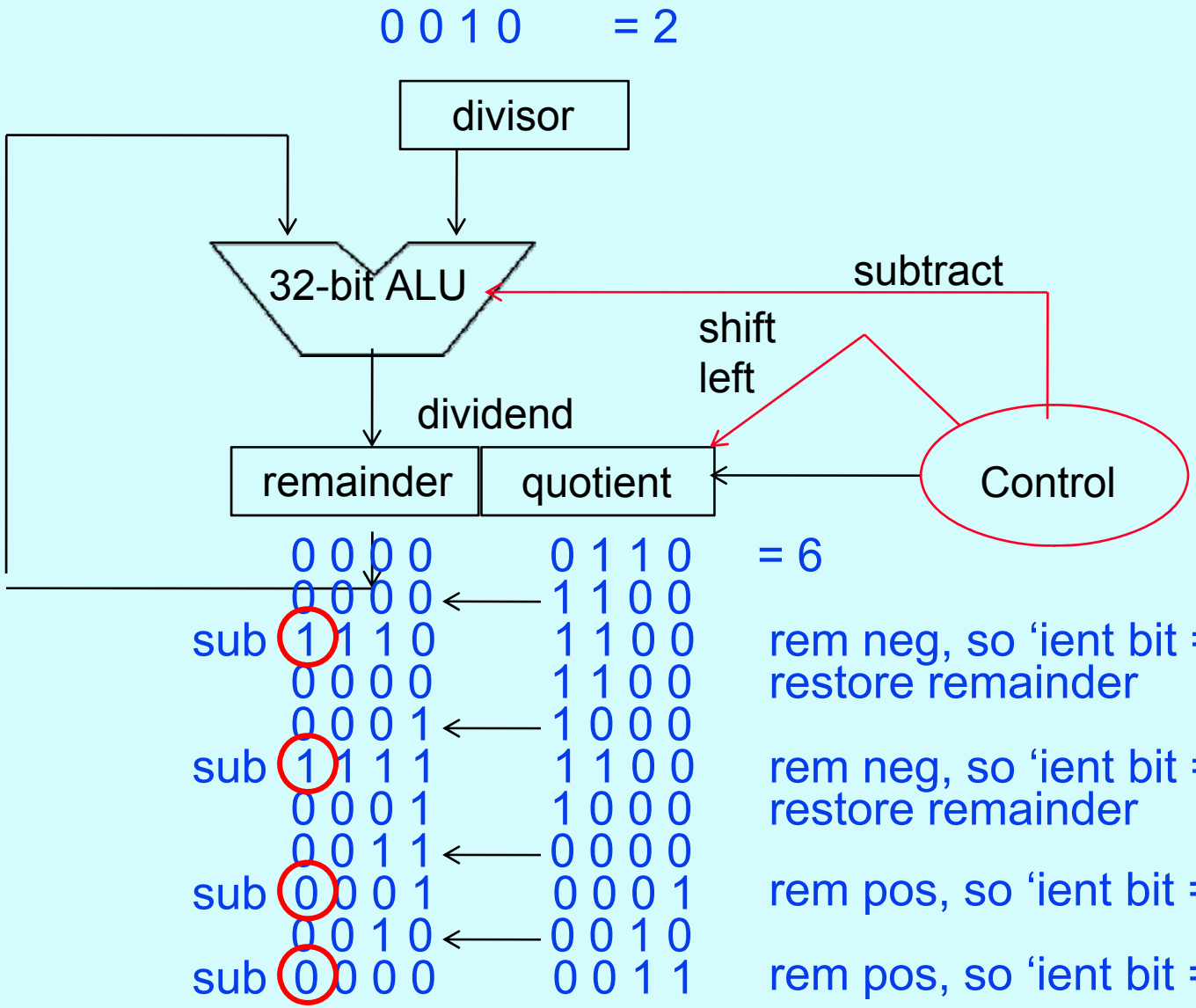
Remainder

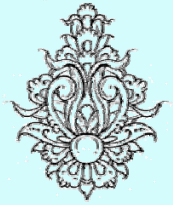
Shift right
Shift left
Write

64 bits

Control test

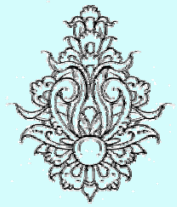
شبیه به مدار ضرب نیست؟!


0 0 1 0 = 2
divisor
32-bit ALU
subtract
shift
left
dividend
remainder
quotient
Control
0 0 0 0 0 1 1 0 = 6
0 0 0 0 ← 1 1 0 0
sub 1 1 1 0 1 1 0 0 rem neg, so ‘ient bit = 0
0 0 0 0 1 1 0 0 restore remainder
0 0 0 1 ← 1 0 0 0
sub 1 1 1 1 1 1 0 0 rem neg, so ‘ient bit = 0
0 0 0 1 1 0 0 0 restore remainder
0 0 1 1 ← 0 0 0 0
sub 0 0 0 1 0 0 0 1 rem pos, so ‘ient bit = 1
0 0 1 0 ← 0 0 1 0
sub 0 0 0 0 0 0 1 1 rem pos, so ‘ient bit = 1



مدارهای تقسیم سریع

- نمی‌توان تقسیم را به صورت موازی انجام داد.
  - تفریق به صورت مشروط انجام می‌شود.
- الگوریتم‌های سریع‌تر مانند SRT در هر مرحله چندین بیت خارج قسمت تولید می‌کنند.
  - باز هم الگوریتم در گام‌های متفاوت انجام می‌شود.



تقسیم در MIPS

- برای نتیجه‌ی تقسیم از ثبات‌های HI و و LO استفاده می‌شود.

– HI: 32-bit remainder

– LO: 32-bit quotient

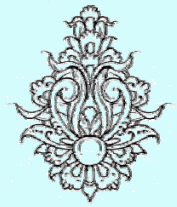
– دستورات

– `div rs, rt  /  divu rs, rt`

– سرریز یا تقسیم بر صفر باید به صورت نرم‌افزاری چک شود.

– برای دسترسی به نتایج می‌توان از دستورات زیر استفاده کرد.

– `mfhi, mflo`



مثال

```
ahmad@ubuntu:~/Courses/Assembly/chapter6$ gcc denor.c -std=c99
ahmad@ubuntu:~/Courses/Assembly/chapter6$ time ./a.out
*a=0.00000000000000000000000000000000000011754944909 52
sum=0.00000000000000000000000000000039443045261050590271

real    0m10.527s
user    0m10.429s
sys     0m0.008s
```

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
int main(){
  float *a;
  int b=0x00000001;

  a=(float*)(&b);
  printf("*a=%.50f\n",*a);

 float sum=0;
 for(int i=0; i<INT_MAX;i++)
    sum=sum+(*a);
  printf("sum=%.50f\n",sum);
}
```

```c
#include <limits.h>
int main(){
  float *a;
  int b=0x00800001;

  a=(float*)(&b);
  printf("*a=%.50f\n",*a);

 float sum=0;
 for(int i=0; i<INT_MAX;i++)
    sum=sum+(*a);
  printf("sum=%.50f\n",sum);
}
```

```
ahmad@ubuntu:~/Courses/Assembly/chapter6$ gcc denor.c -std=c99
ahmad@ubuntu:~/Courses/Assembly/chapter6$ time ./a.out
*a=0.00000000000000000000000000000000000000000140130
sum=0.00000000000000000000000000000000000002350988701645

real    5m5.527s
user    4m59.323s
sys     0m0.288s
```

ممیز شناور

- برای نمایش اعداد اعشاری و اعداد بسیار بزرگ از سیستم عددی میز شناور استفاده می شود.
  - ۳.۱۴۱۵۹۲۶۵
  - ۲.۷۱۸۲۸
  - ۰۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۰.۱× ۱۰$^{-۹}$

Copyright 2004 Koren

	IBM/370	DEC/VAX	Cyber 70
Word length (double)	32 (64) bits	32 (64) bits	60 bits
Significand+{hidden bit}	24 (56) bits	$23+1$ $(55+1)$ bits	48 bits
Exponent	7 bits	8 bits	11 bits
Bias	64	128	1024
Base	16	2	2
Range of M	$\frac{1}{16} \le M < 1$	$\frac{1}{2} \le M < 1$	$1 \le M < 2$
Representation of M	Signed-magnitude	Signed-magnitude	One's complement
Approximate range	$16^{63} \approx 7 \cdot 10^{75}$	$2^{127} \approx 1.9 \cdot 10^{38}$	$2^{1023} \approx 10^{307}$
Approximate resolution	$2^{-24} \approx 10^{-7}$ (10^{-17})	$2^{-24} \approx 10^{-7}$ (10^{-17})	$2^{-48} \approx 10^{-14}$

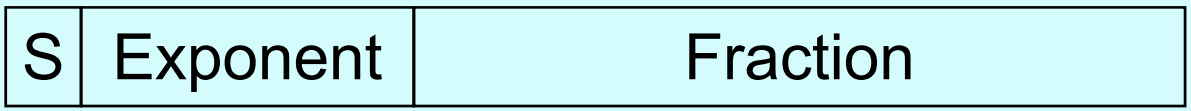
ممیز شناور (ادامه...)

- در سال ۱۹۸۵ استاندارد IEEE Std 754 مطرح شد.
- این استاندارد واگرایی شیوه‌های به کار رفته برای نمایش ممیز شناور را کاهش داد.
  - بدین‌ترتیب برنامه‌های نوشته شده برای مقاصد علمی قابل حمل شدند.
- بر طبق این استاندارد، اعداد به دو شیوه نشان داده می‌شود:

- single
- double

single: 8 bits
double: 11 bits

single: 23 bits
double: 52 bits



$$x = (-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$$

Single: Bias = 127; Double: Bias = 1023

Denormal Numbers

اعداد نانرمال

Exponent = 000...0 $\Rightarrow$ hidden bit is 0

$$x = (-1)^S \times (0 + \text{Fraction}) \times 2^{-\text{Bias}}$$

- بدین ترتیب می‌توان اعداد کوچک‌تری را نیز نمایش داد.
- در صورتی که بخش کسری را برابر صفر قرار دهیم:

$$x = (-1)^S \times (0 + 0) \times 2^{-\text{Bias}} = \pm 0.0$$

بدین ترتیب دو نمایش برای 0 خواهیم داشت

Infinities and NaNs

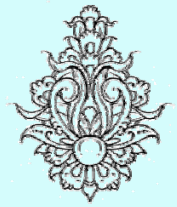
ناعدد و بی‌نهایت

- Exponent = 111...1, Fraction = 000...0
  - $\pm\infty$
    - در محاسبات بعدی نیز قابل استفاده است.
- Exponent = 111...1, Fraction ≠ 000...0
  - ناعدد (Not-a-Number (NaN))
  - بیان‌گر محاسبات نادرست می‌باشد.
  - این اعداد نیز قابلیت استفاده در محاسبات بعدی را دارند.

Single precision		Double precision		Object represented
Exponent	Fraction	Exponent	Fraction	
0	0	0	0	0
0	Nonzero	0	Nonzero	± denormalized number
1–254	Anything	1–2046	Anything	± floating-point number
255	0	2047	0	± infinity
255	Nonzero	2047	Nonzero	NaN (Not a Number)

محاسبات مقادیر خاص

- $(+0) + (+0) = (+0) - (-0) = +0$
- $(+0) \times (+5) = +0$
- $(+0) / (-5) = -0$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $x - (+\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \times x = \pm\infty$, depending on the sign of x
- $x / (+\infty) = \pm 0$, depending on the sign of x
- $\sqrt{(+\infty)} = +\infty$



- محاسباتی که منجر به تولید ناعدد می‌شود:
  - $(\pm 0) / (\pm 0) = NaN$
  - $(+\infty) + (-\infty) = NaN$
  - $(\pm 0) \times (\pm \infty) = NaN$
  - $(\pm \infty) / (\pm \infty) = NaN$
- ناعدد در محاسبات و مقایسه‌ها
  - $NaN + x = NaN$
  - $NaN + NaN = NaN$
  - $NaN \times 0 = NaN$
  - $NaN \times NaN = NaN$

$NaN < 2 \rightarrow$ false

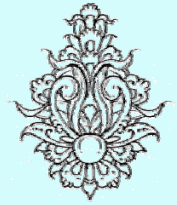
$NaN = Nan \rightarrow$ false

$NaN \neq (+\infty) \rightarrow$ true

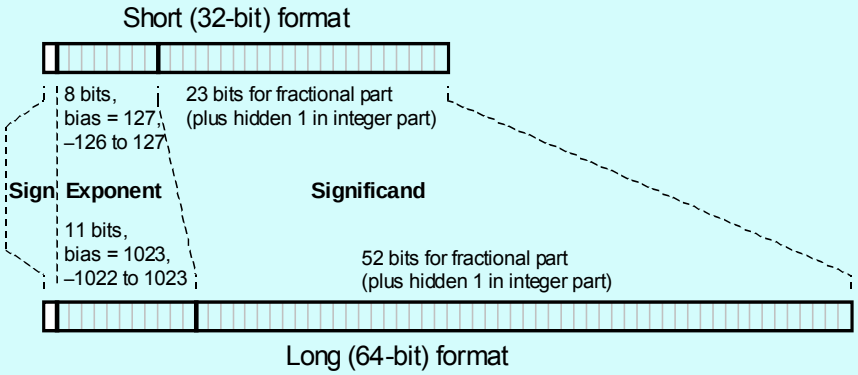
$NaN \neq NaN \rightarrow$ true

دقت در ممیز شناور

- Single: approx 2^{-23}
  - Equivalent to $23 \times \log_{10}2 \approx 23 \times 0.3 \approx 6$
  - برابر با شش رقم اعشار دقت
- Double: approx 2^{-52}
  - Equivalent to $52 \times \log_{10}2 \approx 52 \times 0.3 \approx 16$
  - برابر با شانزده رقم اعشار دقت



پراکندگی داده‌ها در ممیز شناور

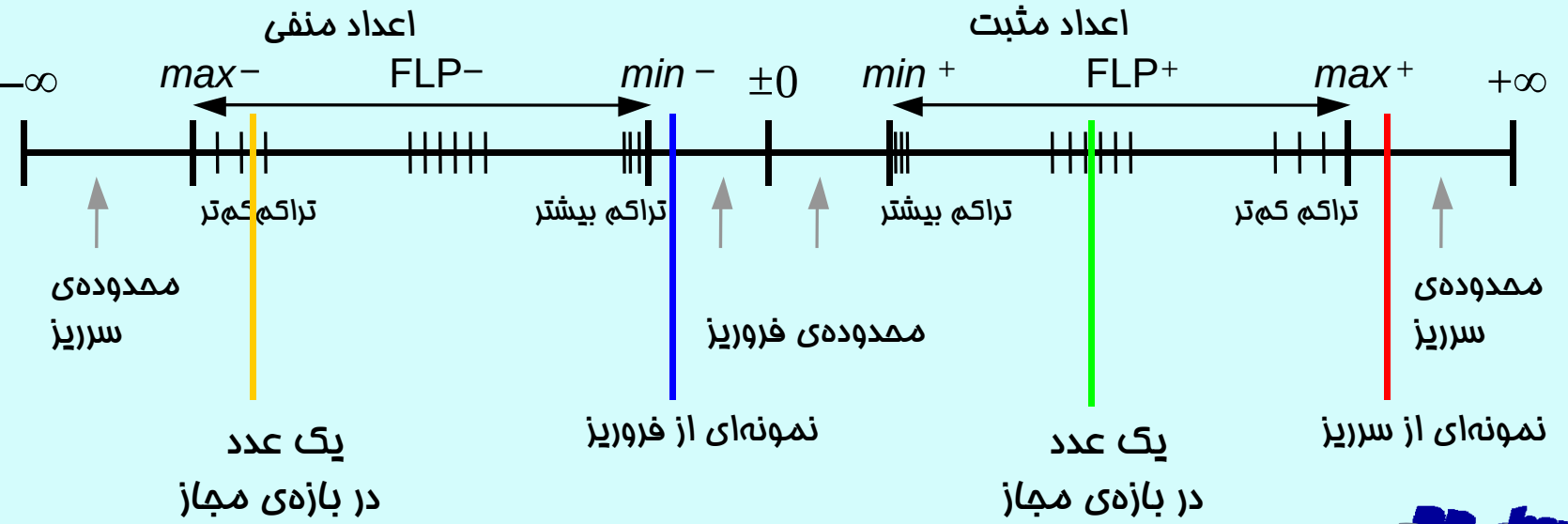


$\pm 0, \pm \infty, \text{NaN}$

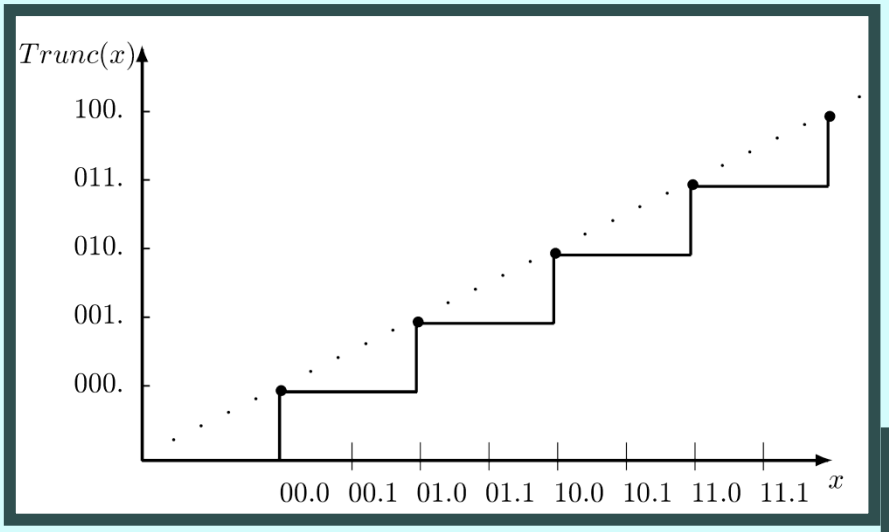
$1.f \times 2^e$

Denormals:

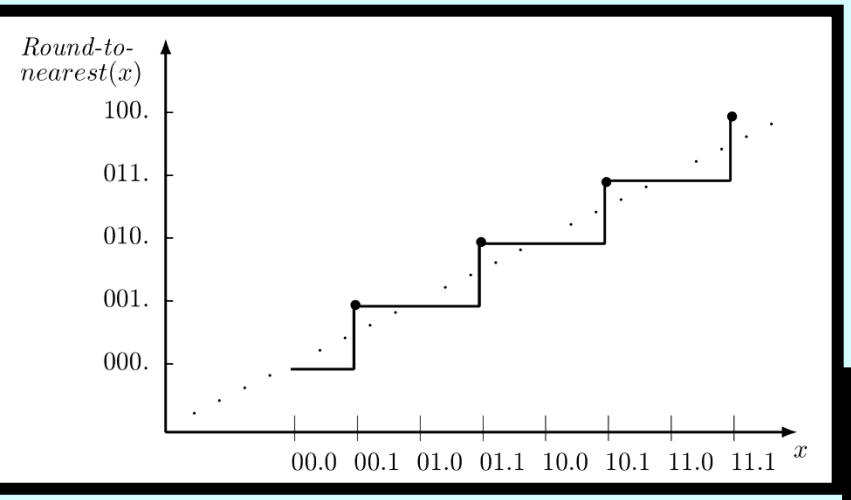
$0.f \times 2^{e_{min}}$



گرد کردن



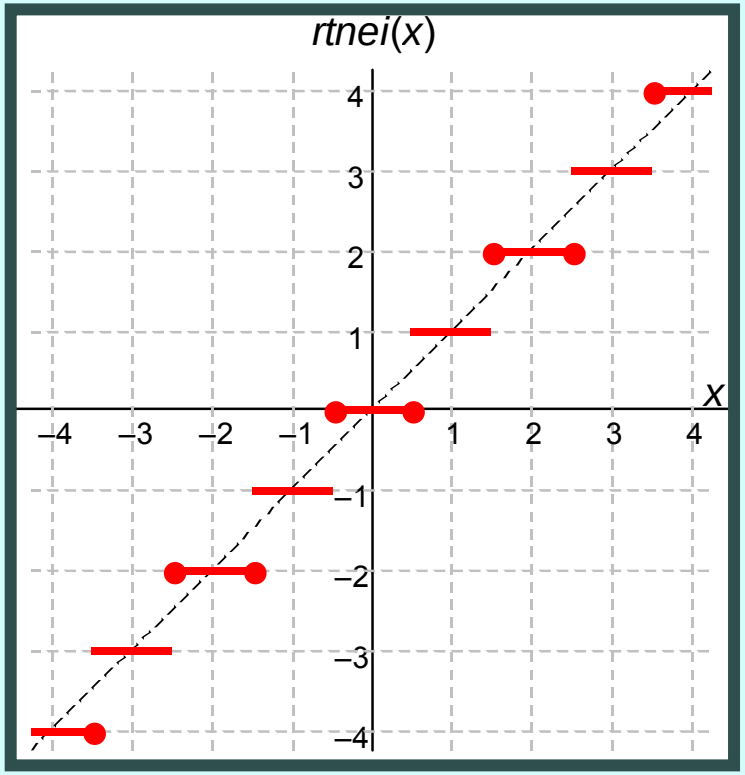
Number	$Trunc(x)$	Error
$X.00$	X	0
$X.01$	X	$-1/4$
$X.10$	X	$-1/2$
$X.11$	X	$-3/4$



Number	*Round-to-nearest(x)*	Error
$X.00$	X	0
$X.01$	X	$-1/4$
$X.10$	$X + 1$	$+1/2$
$X.11$	$X + 1$	$+1/4$

Copyright 2004 Koren

گرد کردن به نزدیک‌ترین مقدار زوج



Number	$Round(x)$	Error	Number	$Round(x)$	Error
$X0.00$	$X0.$	0	$X1.00$	$X1.$	0
$X0.01$	$X0.$	$-1/4$	$X1.01$	$X1.$	$-1/4$
$X0.10$	$X0.$	$-1/2$	$X1.10$	$X1.+1$	$+1/2$
$X0.11$	$X1.$	$+1/4$	$X1.11$	$X1.+1$	$+1/4$

شیوه‌های گرد کردن در استاندارد IEEE754

LSB	R	S	Operation	$\overline{Error}$
0	0	0	+ 0	0
0	0	1	+ 0	$-0.25\ ulp$
0	1	0	+ 0	$-0.50\ ulp$
0	1	1	$+0.5\ ulp$	$+0.25\ ulp$
1	0	0	+ 0	0
1	0	1	+ 0	$-0.25\ ulp$
1	1	0	$+0.5\ ulp$	$+0.50\ ulp$
1	1	1	$+0.5\ ulp$	$+0.25\ ulp$
			Total	0

(a) Round-to-nearest-even scheme

R	S	Operation	$\overline{Error}$
0	0	+ 0	0
0	1	+ 0	$-0.25\ ulp$
1	0	+ 0	$-0.50\ ulp$
1	1	+ 0	$-0.75\ ulp$
		Total	$-0.375\ ulp$

(b) Round-to-zero scheme

Sign	R	S	Operation
+	0	0	+ 0
+	0	1	$+1\ ulp$
+	1	0	$+1\ ulp$
+	1	1	$+1\ ulp$
−	0	0	+ 0
−	0	1	+ 0
−	1	0	+ 0
−	1	1	+ 0

(c) Round-to-plus-infinity scheme

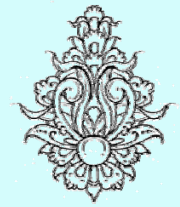
Sign	R	S	Operation
−	0	0	+ 0
−	0	1	$+1\ ulp$
−	1	0	$+1\ ulp$
−	1	1	$+1\ ulp$
+	0	0	+ 0
+	0	1	+ 0
+	1	0	+ 0
+	1	1	+ 0

(d) Round-to-minus-infinity scheme

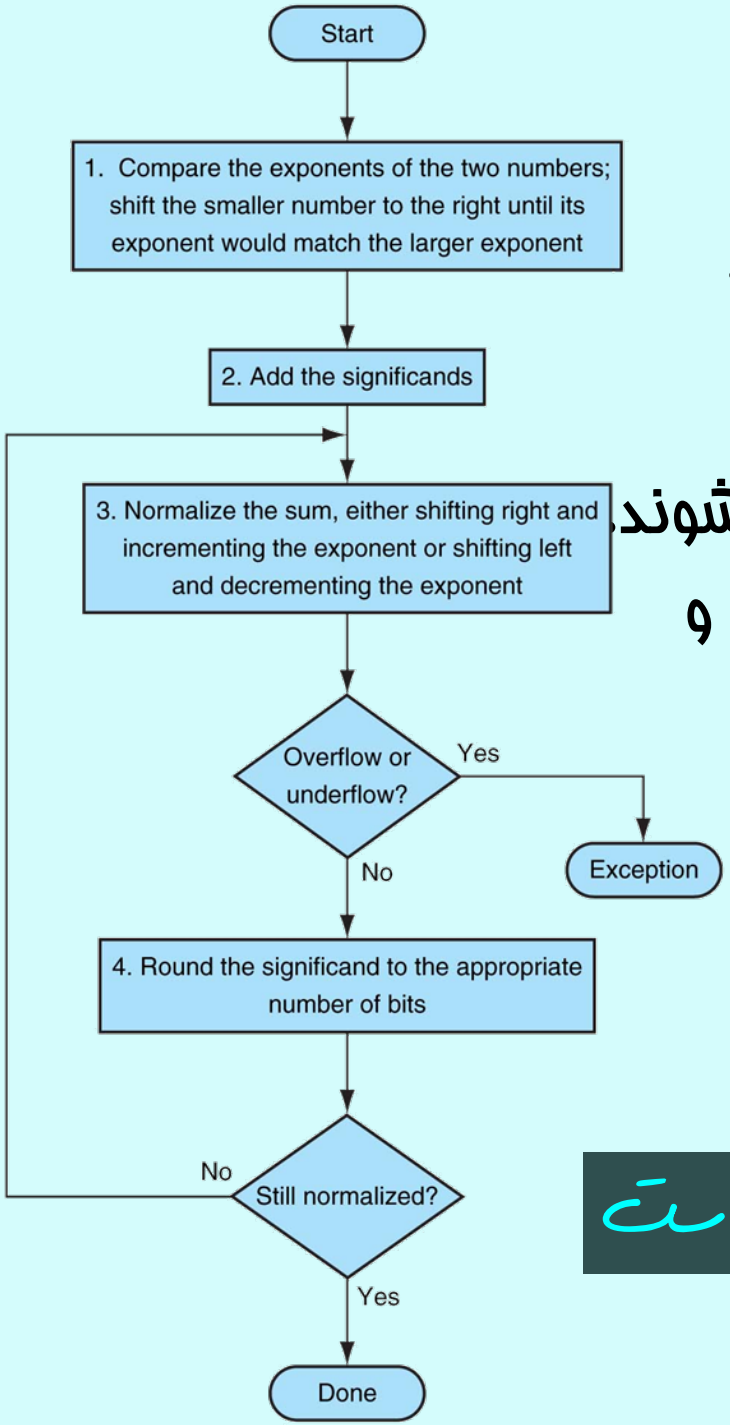
Copyright 2004 Koren

مشخصات اعداد ممیز شناور IEEE 754

Feature	Single/Short	Double/Long
Word width in bits	32	64
Significand in bits	23 + 1 hidden	52 + 1 hidden
Significand range	$[1, 2 - 2^{-23}]$	$[1, 2 - 2^{-52}]$
Exponent bits	8	11
Exponent bias	127	1023
Zero (± 0)	e + bias = 0, f = 0	e + bias = 0, f = 0
Denormal	e + bias = 0, $f \neq 0$ represents $\pm 0.f \times 2^{-126}$	e + bias = 0, $f \neq 0$ represents $\pm 0.f \times 2^{-1022}$
Infinity ($\pm\infty$)	e + bias = 255, f = 0	e + bias = 2047, f = 0
Not-a-number (NaN)	e + bias = 255, $f \neq 0$	e + bias = 2047, $f \neq 0$
Ordinary number	e + bias $\in [1, 254]$ $e \in [-126, 127]$ represents $1.f \times 2^e$	e + bias $\in [1, 2046]$ $e \in [-1022, 1023]$ represents $1.f \times 2^e$
min	$2^{-126} \cong 1.2 \times 10^{-38}$	$2^{-1022} \cong 2.2 \times 10^{-308}$
max	$\cong 2^{128} \cong 3.4 \times 10^{38}$	$\cong 2^{1024} \cong 1.8 \times 10^{308}$



جمع در ممیز شناور

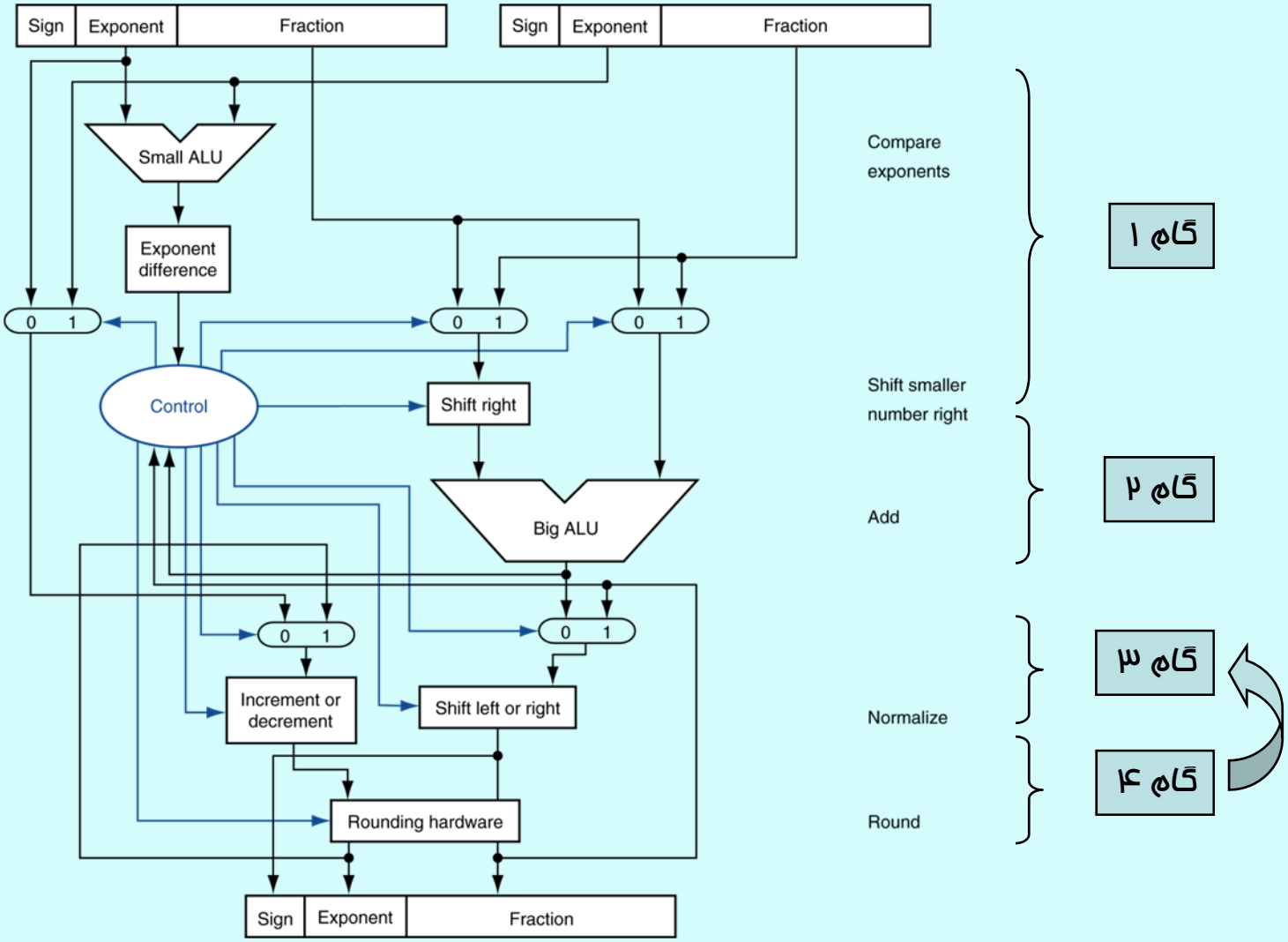


1. ابتدا توان‌ها را یکسان می‌کنیم.
   - این کار با شیفت عدد کوچک‌تر به راست انجام می‌شود.
2. مقادیر اعشاری با هم جمع می‌شوند.
3. حاصل بهنجار شده و وقوع سرریز و فروریز بررسی می‌شود.
4. حاصل گرد می‌شود.

- مجددا بهنجار بودن عدد بررسی می‌شود.

نسبت به اعداد صحیح پیچیده‌تر است

سخت‌افزار جمع ممیز شناور



ضرب ممیز شناور

1. توان‌ها با هم جمع می‌شود
2. significandها در هم ضرب می‌شوند.
3. اعداد بهنجار شده و بروز سرریز یا فروریز چک می‌شود.
4. اعداد گرد می‌شوند و در صورت نیاز مجدد بهنجار می‌شوند.
5. علامت عدد تعیین می‌شود.