SVM

# شبکه‌های عصبی مصنوعی

# ۴۳-۱۱-۷۱۳-۰۱

## بخش چهارم


دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی و علوم کامپیوتر

زمستان ۱۳۹۴

احمد محمودی ازناوه


http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

# فهرست مطالب

- ماشین بردار پشتیبان( SVM)
  - تاریخچه
  - معرفی
  - داده‌های جدایی‌پذیر خطی
- Soft Margin
- مجموعه‌های جدایی‌ناپذیر خطی
  - نگاشت به فضایی با ابعاد بالا
  - Inner product kernel
- مثال XOR
- SVM در Matlab

# تاریخچه

- نسخه‌ی اولیه‌ی SVM توسط آقای Vladimir Vapnik ارائه شد.
- Vapnik با همکاری خانم Corinna Cortes استاندارد کنونی SVM را در سال ۱۹۹۳ پایه‌ریزی کرده و در سال ۱۹۹۵ منتشر نمودند.

**Cortes, C. and V. Vapnik (1995). "Support-vector networks." Machine Learning 20(3): 273-297.**

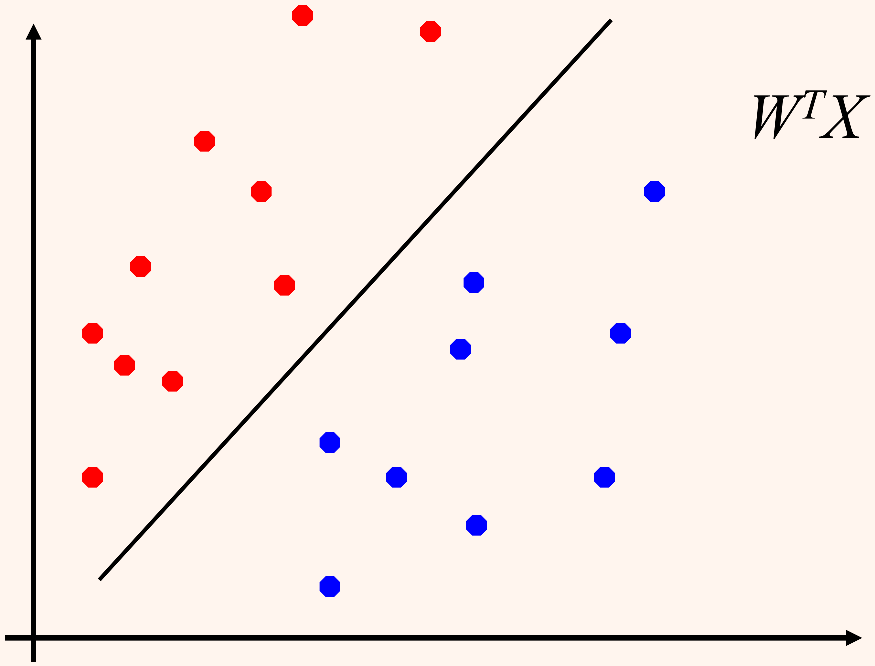
# معرفی

- یک جداکننده‌ی خطی را می‌توان همانند شکل زیر در نظر گرفت.

$W^TX + B > 0$

$W^TX + b = 0$

$W^TX + b < 0$



$$F(X) = SIGN(W^TX + b)$$

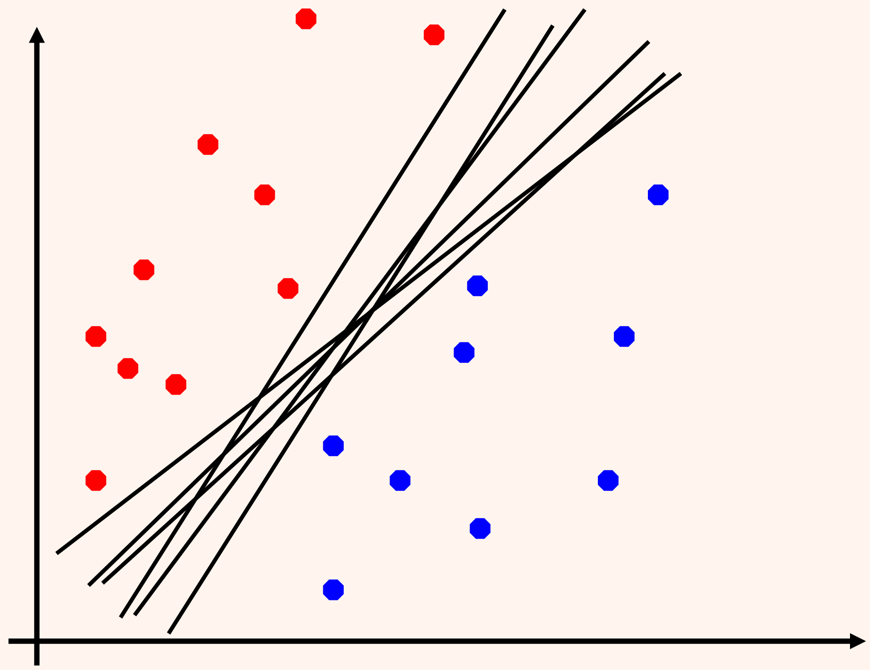




www.cs.utexas.edu/~mooney/cs391L/slides/svm.ppt

# مرز بهینه

- سوال
  - کدام یک از مرزها، مرزی بهینه برای جداسازی است؟





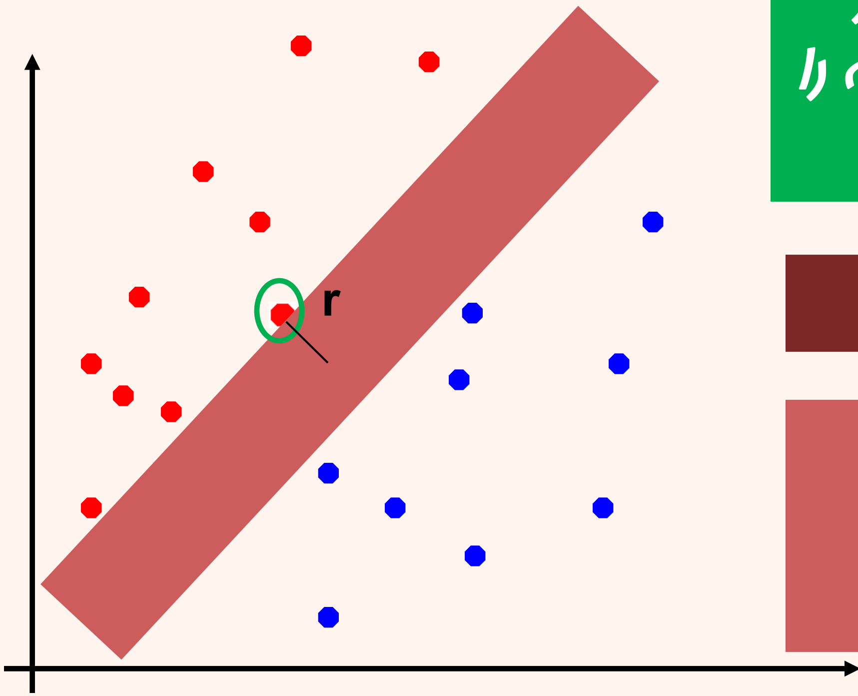


www.cs.utexas.edu/~mooney/cs391L/slides/svm.ppt

# مرز جداسازی

- می‌خواهیم به گونه‌ای بهترین مرز جداسازی را به‌دست آوریم.

**Margin of separation**




فرض کنیم نزدیک‌ترین نقطه به مرز جداسازی در نظر گرفته شده و فاصله را r بنامیم.

هدف ماکزیمم نمودن r است.

یک حاشیه مشخص می‌کنیم هر مرزی که حاشیه‌ی پهن‌تری را نتیجه دهد، بهتر است.

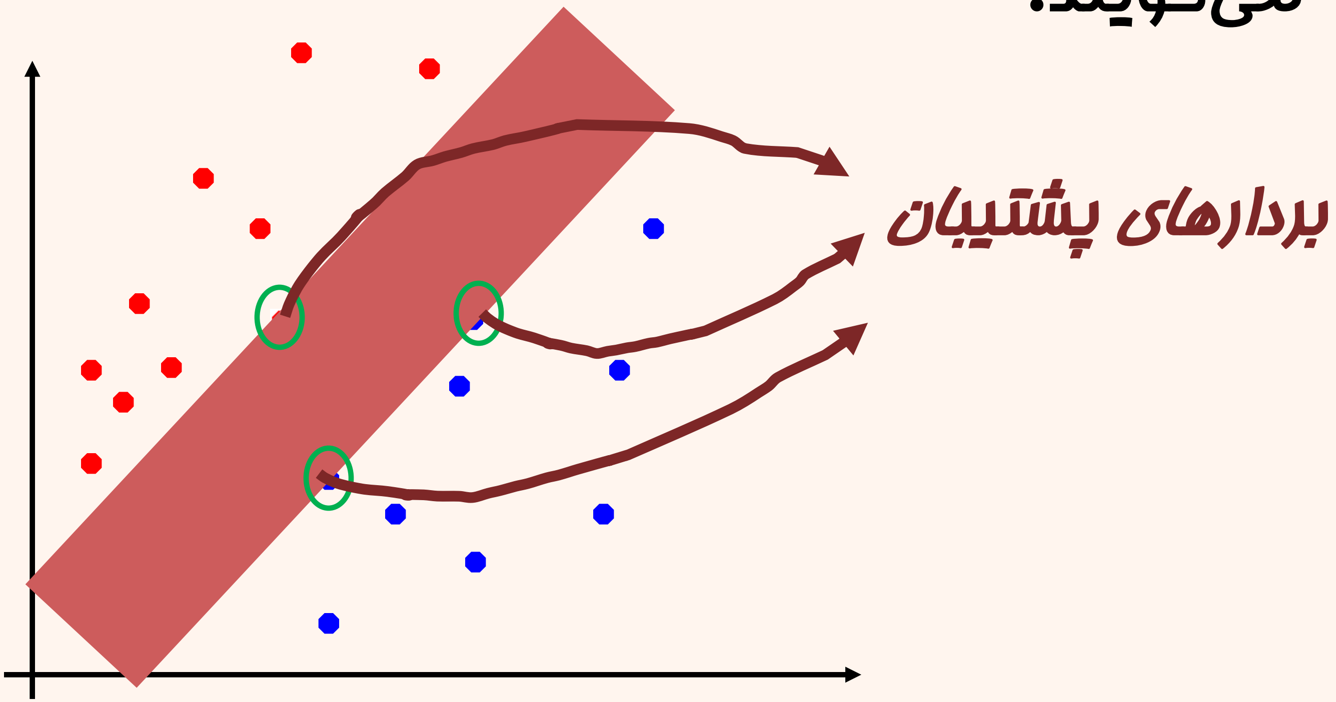
# حاشیه‌ی ماکزیمم

- ماکزیمم نمودن حاشیه (Margin) ایده‌ی خوبی است جهت جداسازی خطی، این شیوه را LSVM یا Linear SVM می‌نامند.
- در این حالت نمونه‌هایی که به روی مرز حاشیه هستند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.
- بدین‌وسیله می‌توان از نمونه‌های دیگر صرفنظر کرد و تنها به نمونه‌های مهم روی مرز حاشیه پرداخت.

Support Vector

# بردار پشتیبان

- به نمونه‌های روی مرز حاشیه «بردار پشتیبان» می‌گویند.




Optimal hyperplane

# مرز جداسازی

- برای معادله‌ی مرز جداسازی داشتیم:

$$W^T X + b = 0$$

$$(X_i, d_i = +1) \qquad W^T X_i + b > 0$$

$$(X_i, d_i = -1) \qquad W^T X_i + b < 0$$

- فرض کنیم مرز بهینه توسط $W_{op}$ و $b_{op}$ مشخص شود.
- فرض: فرض کنیم نزدیک‌ترین نقطه به مرز جداسازی را در نظر گرفته، فاصله را «**r**» بنامیم.

# مرز جداسازی (ادامه...)

- هدف
  - ماکزیمم نمودن فاصله یا همان $\rho=2r$ است.
  - برای نقاط روی مرز جداسازی بهینه داریم:

$$W_{op}^{T} X + b_{op} = 0$$

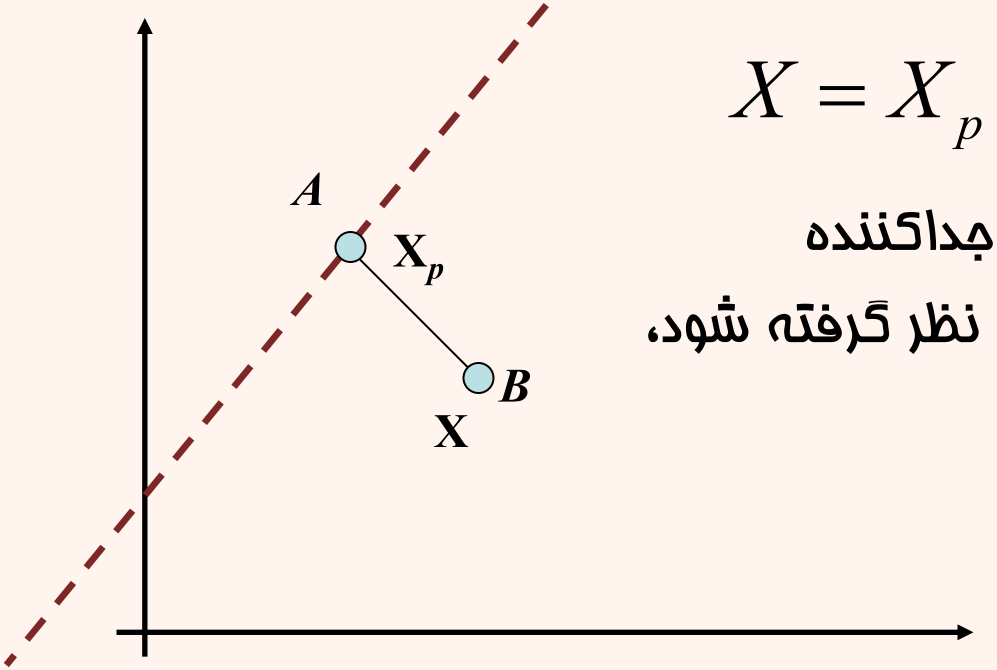
  - برای نقاط خارج از مرز داریم:

$$g(X) = W_{op}^{T} X + b_{op}$$

  - $g(X)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

# مرز جداسازی (ادامه...)

- در صورتی که $X$ بردار پشتیبان باشد، طبق شکل زیر خواهیم داشت:




$$X = X_p + \overrightarrow{AB}$$

- AB در جهت عمود بر مرز جداکننده
- اگر اندازه‌ی بردار AB=r در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AB} = r\frac{W_{op}}{\|W_{op}\|}$$

$$X = X_p + r\frac{W_{op}}{\|W_{op}\|}$$

# مرز جداسازی (ادامه...)

- داشتیم:

$$g(X) = W_{op}{}^{T} X + b_{op}$$

$$X = X_p + r\frac{W_{op}}{\left\|W_{op}\right\|}$$

$$g(X) = W_{op}^{T}[X_p + r\frac{W_{op}}{\left\|W_{op}\right\|}] + b_{op}$$

$$g(X) = \underbrace{W_{op}^{T} X_p + b_{op}}_{\text{روی مرز پس برابر با صفر}} + r\frac{W_{op}}{\left\|W_{op}\right\|} W_{op}^{T}$$

$$g(X) = r\frac{\left\|W_{op}\right\|^2}{\left\|W_{op}\right\|}$$

$$\boxed{g(X) = r\left\|W_{op}\right\|}$$

# مرز جداسازی (ادامه...)

$$g(X) = r\left\|W_{op}\right\|$$

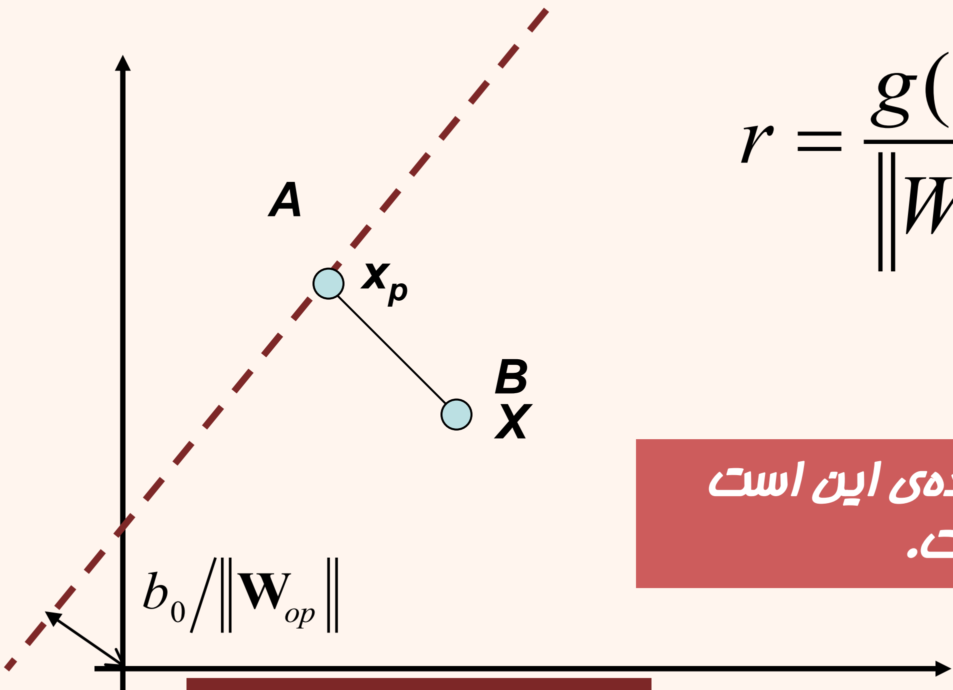
هدف ماکزیمم نمودن r است.

$$r = \frac{g(x)}{\left\|W_{op}\right\|}$$

در این حالت تحت شرایطی می‌باید W کمینه گردد.

X=0

$$r = \frac{g(X)}{\left\|W_{op}\right\|} = \frac{b_{op}}{\left\|W_{op}\right\|}$$




فاصله از مبدا مختصات

مثبت یا منفی بودن bop نشان دهنده‌ی این است
که مبدأ در کدام سمت خط مرزی است.

# مرز جداسازی (ادامه...)

## مسأله یافتن $W_{op}$ و $b_{op}$ است

- جداساز خطی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(X_i,+1) \quad W_{op}^T X_i + b_{op} \geq 1 \quad for\ d_i = +1$$

$$(X_i,-1) \quad W_{op}^T X_i + b_{op} \leq -1 \quad for\ d_i = -1$$

**به صورت کلی داریم:**

$$d_i(W_{op}^T X + b_{op}) \geq 1$$

- رابطه‌ی بالا برای تمامی الگوهای آموزشی برقرار است.
- و در نتیجه برای بردارهای پشتیبان

$$g(X^s) = W_{op}^T X^s + b_{op} = \pm 1$$

# مرز جداسازی (ادامه...)

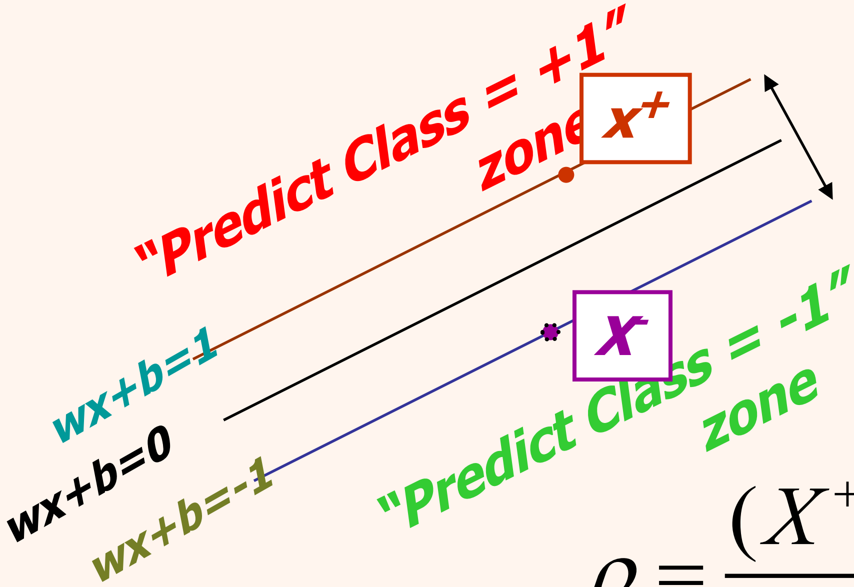
$$g(X^s) = W_{op}{}^T X^s + b_{op} = \pm 1$$

$$r = \frac{g(X^s)}{\|W_{op}\|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|W_{op}\|} \\ -\dfrac{1}{\|W_{op}\|} \end{cases}$$

- در نتیجه فاصله‌ی دو بردار پشتیبان در دو طرف مرز:

$$\rho = 2r = \frac{2}{\|W_{op}\|}$$

# جدایی‌پذیر خطی




**ρ=Margin Width**

$$\rho = \frac{(X^{+} - X^{-}) \cdot W}{\|W\|} = \frac{2}{\|W\|}$$

می‌دانیم:

- **W** . **X**$^{+}$ + $b$ = +1
- **W** . **X**$^{-}$ + $b$ = -1
- **W** . (**X**$^{+}$-**X**$^{-}$) = 2

# جدایی‌پذیر خطی

$$\rho = 2r = \frac{\|\pm 2\|}{\|W_{op}\|}$$

- با توجه به دو رابطه‌ی

$$d_i(W_{op}{}^T X + b_{op}) \geq 1$$

- به این نتیجه می‌رسیم که $\mathbf{W}_{\mathrm{op}}$ می‌باید مینیمم گردد.
- این مسأله معادل مینیمم کردن

$$\Phi(W) = \frac{1}{2} W^T W$$

  - $\Phi$ یک تابع محدب (Convex Function) است.
  - طبق رابطه‌ی $d_i(W_{op}{}^T X_i + b_{op}) \geq 1$ برای $N$ الگوی آموزشی شرط زیر می‌باید برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{N} [d_i(W_{op}{}^T X_i + b_{op}) - 1]$$

این میزان بزرگ‌تر یا مساوی صفر است

شبکه عصبی

# خلاصه

وزن‌ها و بایاس را به گونه‌ای بیابید که:

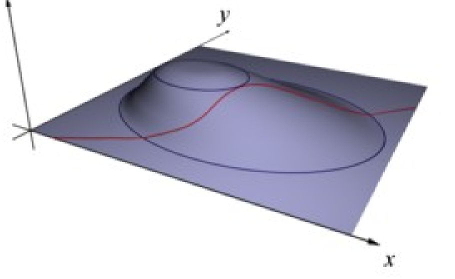
$$\rho = \frac{2}{\|W\|} \text{ is maximized}$$

and for all $(X_i, d_i)$, i=1..$n$ : $\quad d_i(W^T X_i + b) \geq 1$

وزن‌ها و بایاس را به گونه‌ای بیابید که:

$$\Phi(\boldsymbol{W}) = 1/2\ \|W\|^2 = 1/2\, W^T W \text{ is minimized}$$

and for all $(X_i, d_i)$, i=1..$n$ : $\quad d_i\,(\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}_i + b) \geq 1$




# یافتن رویه‌ی بهینه

- رابطه‌ی لاگرانژ زیر تعریف می‌شود به گونه‌ای که، هر دو قید ذکر شده را پوشش دهد:

$$J(W,b,\alpha)=\frac{1}{2}W^TW-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[d_i(W^TX_i+b)-1]$$

**Lagrange multiplier(nonnegative)**

- برای به‌دست آوردن $\boldsymbol{W}_{op}$ و $b_{op}$ نسبت به هر دو مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial J}{\partial W}=0\Rightarrow W-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i X_i=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{W_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i X_i}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b}=0\Rightarrow -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0}$$

$b_{op}$ به‌دست نمی‌آید

ولی یک قید می‌دهد

# یافتن رویه‌ی بهینه

- دو شرط برای α خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i = 0 \\ \alpha_i[\underbrace{d_i(W^T X_i + b) - 1}_{\text{صفر}}] = 0 \end{cases}$$

غیر صفر

**Karush–Kuhn–Tucker(KKT) condition of optimization theory**

- به ازای هر $\alpha_i$ برای الگوهای آموزشی متناظر با SVها رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$d_i(W_{op}^T X_i + b_{op}) - 1 = 0$$

- در نتیجه $\alpha_i$ متناظر با بردارهای پشتیبان غیرصفر خواهد بود.

# یافتن رویه‌ی بهینه

$$J(W,b,\alpha)=\frac{1}{2}\|W\|^2-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[d_i(W^TX_i+b)-1]$$

$$J(W,b,\alpha)=\frac{1}{2}W^TW-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i W^T X_i-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i b+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

- برای مقادیر بهینه داشتیم:

$$W_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i X_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0$$

**Duality theorem**

- پس خواهیم داشت:

$$J(W_{op},b_{op},\alpha)=\frac{1}{2}W_{op}^TW_{op}-W_{op}^TW_{op}+0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

# Dual Problem

$$J(W_{op},b_{op},\alpha)=\frac{1}{2}W_{op}^{T}W_{op}-W_{op}^{T}W_{op}+0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$\begin{cases} =\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2}W_{op}^{T}W_{op} \qquad =Q(\alpha) \\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0 \end{cases}$$

مینیمم نمودن W همانند ماکزیمم نمودن Q است زیرا در $W_{op}$ مقدار W کم‌ترین میزان است و در این صورت است که کل عبارت ماکزیمم می‌شود.

# یافتن رویه‌ی بهینه

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}W_{op}^{T}W_{op}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i X_i]^T[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j d_j X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i d_i \alpha_j d_j X_i^T X_j$$

$$\boxed{\begin{cases} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i d_i \alpha_j d_j X_i^T X_j \\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i = 0 \\ \alpha_i \geq 0 \; for \; 1 = 0, 1, \ldots\ldots, N \end{cases}}$$

$\alpha_i$ ها وابسته به الگوهای $X_i$ , $X_j$ و خروجی های مرتبط است

# یافتن رویه‌ی بهینه

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i X_i]^T [\sum_{j=1}^{N} \alpha_j d_j X_j]$$

**بدون در نظر گرفتن قیود،** جهت محاسبه‌ی $\alpha$ها می‌توان نسبت به $\alpha_k$ مشتق گرفته برابر با صفر قرار داد.

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_k} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \alpha_i d_i d_k X_i^T X_k - \alpha_k d_k^2 X_k^T X_k = 0$$

$$M_{i,j} = X_i^T X_j$$

ضرب داخلی

N معادله و N مجهول

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_k} = 1 - d_k \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i M_{i,k} = 0$$

# یافتن رویه‌ی بهینه

- پس از به دست آوردن α خواهیم داشت:

$$W_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i X_i$$

$$X^s = X^{\text{support vector}} \Rightarrow W_{op}^T X^s + b_{op} = \pm 1$$

$$\Rightarrow b_{op} = \pm 1 - W_{op}^T X^s$$

# یافتن رویه‌ی بهینه

$W = \Sigma \alpha_i d_i X_i$ $\qquad b = d_k - W^T X_k$ for any $X_k$ such that $\alpha_k \neq 0$

هر $\alpha_i$ مخالف صفر، نشان‌دهنده‌ی این است که $X_i$ متناظرش یک بردار پشتیبان است.

در این حالت تابع جداکننده همانند زیر است:

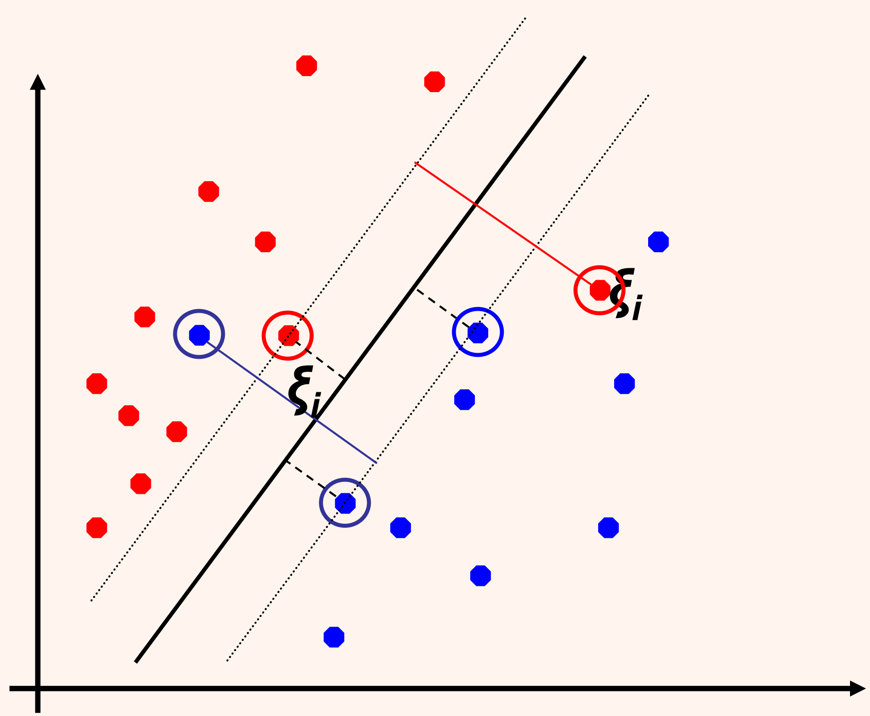
$$g(X) = \Sigma \alpha_i d_i \underbrace{X_i^T X}_{\text{ضرب داخلی دو بردار}} + b$$

**توجه:**

حل مساله بهینه‌سازی وابسته به محاسبه ضرب داخلی بین تمامی نمونه‌های آموزشی است.

# Soft Margin

- SVM برای داده‌های جدایی‌پذیر خطی مورد بررسی قرار گرفت.
- حال اگر مجموعه‌ی داده‌های آموزش قابلیت جداسازی را نداشته باشند، چه خواهد شد؟ به بیان بهتر صحبت در مورد مسائل جدایی‌پذیر است که با نویز همراه هستند.

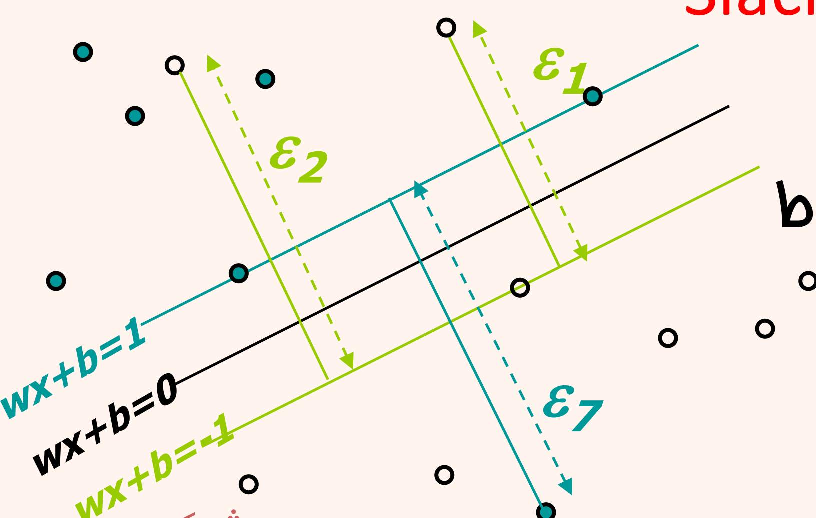


# Soft Margin

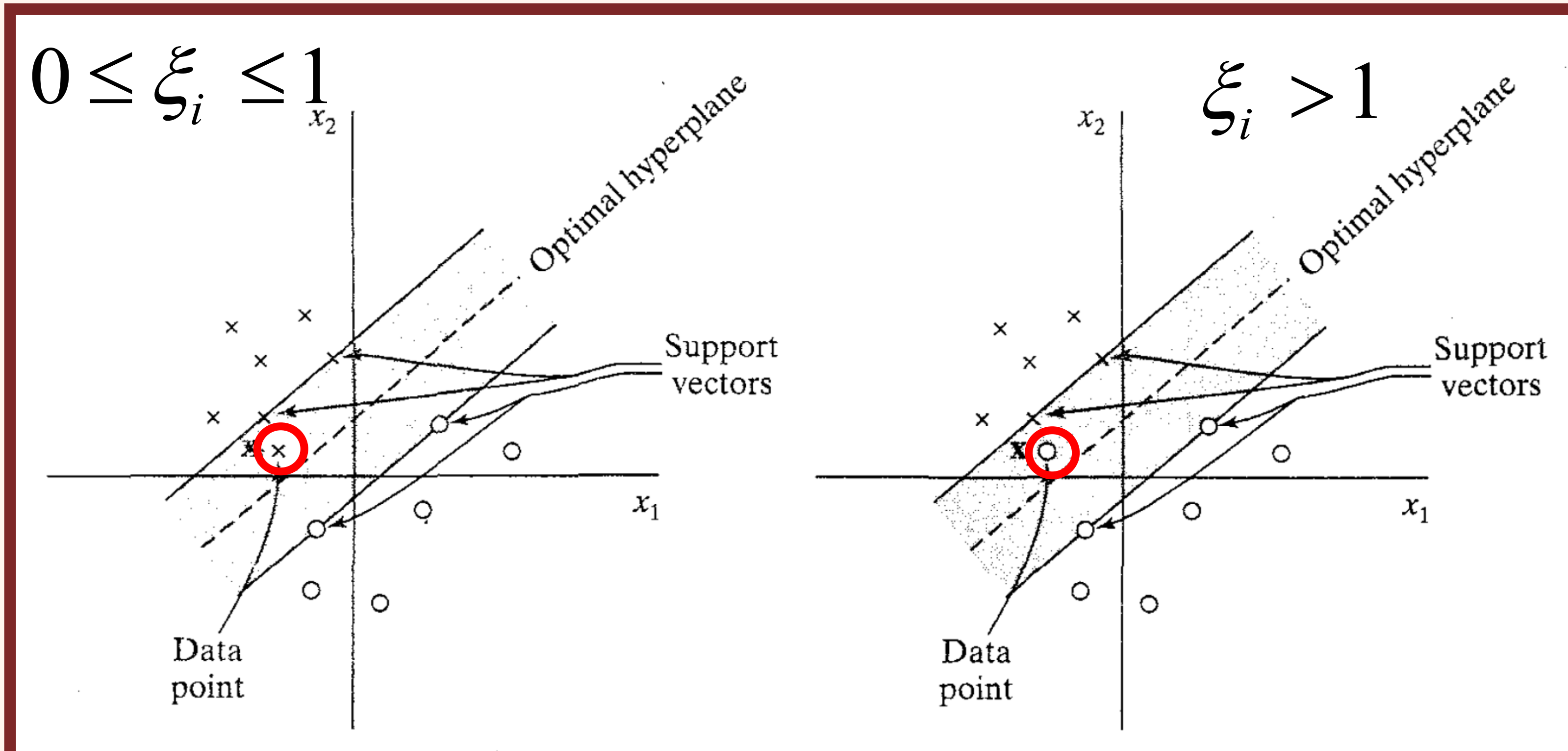
- مسأله‌ی Hard Margin را تبدیل به حل مسأله‌ی Soft Margin می‌شود.
- حاشیه‌ی جداسازی soft گفته می‌شود، در صورتی که برای برخی داده‌ها شرط زیر نقض شود:

$$d_i(W_{op}{}^T X + b_{op}) \geq 1$$

- با اضافه کردن یک Slack Variable مسأله را بار دیگر بررسی می‌کنیم.
- این متغیر میزان انحراف از شرط فوق را نشان می‌دهد.



# Soft Margin Classification




- دو حالت ممکن است رخ دهد:
  - داده‌ی در کلاس درست ولی در حاشیه قرار گیرد.
  - داده‌ی آموزشی به اشتباه دسته‌بندی شود.

$$d_i(W_{op}^T X + b_{op}) \geq 1 - \xi_i, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

# Soft Margin Classification

$$d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X}+b_{op})\geq 1-\xi_i, \quad i=1,2,\cdots$$

- در این حالت بردارهای پشتیبان آن‌هایی هستند که در رابطه‌ی تساوی در عبارت بالا صدق می‌کنند، حتی با وجود ξ>0
  - در صورتی که داده‌های نویزی از مجموعه خارج شود، رویه‌ی جداکننده تغییر خواهد کرد.
- هدف یافتن «رویه‌ای جداکننده» است که در آن خطای طبقه‌بندی نادرست در آن مینیمم شود:

$$\Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{N} I(\xi_i-1) \quad I(\xi)=\begin{cases}0 & \text{if } \xi\leq 0\\ 1 & \text{if } \xi>0\end{cases}$$

# Soft Margin Classification

- با توجه به این که کمینه کردن چنین تابعی یک مسأله‌ی بهینه‌سازی nonconvex است و در رده‌ی NP-complete قرار می‌گیرد، آن را با تابع زیر تقریب می‌زنیم:

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

- و در کل هدف مینیمم کردن عبارت زیر است:

$$\Phi(W,\xi) = \frac{1}{2} W^T W + C \sum_{k=1}^{R} \varepsilon_k$$

**regularization parameter**

این پارامتر نوعی مصالحه بین پیچیدگی ماشین و خطا برقرار می‌کند. هرچه C به صفر نزدیک‌تر باشد به این معناست که خطا اهمیت کم‌تری دارد و در نتیجه حاشیه بزرگ‌تر می‌شود. و هرچه بزرگ‌تر باشد، مسأله به حالت **hard margin** نزدیک‌تر می‌شود.

# Soft Margin

- برای Hard Margin داشتیم:

Find $W$ and b such that
$\Phi(\boldsymbol{W}) = ½\, W^T W$ is minimized and for all $\{(X_i, d_i)\}$
$d_i\,(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}_i + b) \ge 1$

- با اضافه کردن Slack Variable داریم:

Find $W$ and b such that
$\Phi(W) = ½\, W^T W + C\Sigma\xi_i$ is minimized and for all $\{(X_i, d_i)\}$
$d_i\,(W^T X_i + b) \ge 1 - \xi_i$ and $\xi_i \ge 0$ for all i

# یافتن رویه‌ی بهینه

- رابطه‌ی لاگرانژ زیر تعریف می‌شود به گونه‌ای که همه‌ی نیازمندی‌ها را پوشش دهد:

$$J(W,b,\xi,\alpha,\mu)=\frac{1}{2}W^TW+C\sum_i\xi_i-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[d_i(W^TX_i+b)-1+\xi_i]-\sum_i\mu_i\xi_i$$

- بخش آخر از این رو اضافه شده است که تا نامنفی بودن ξ را تضمین کند.

# Soft Margin Classification

در نهایت ضرایب لاگرانژ از عبارت زیر محاسبه خواهند شد:

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j d_i d_j X_i^T X_j$$

با در نظر گرفتن قیود زیر

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0$$

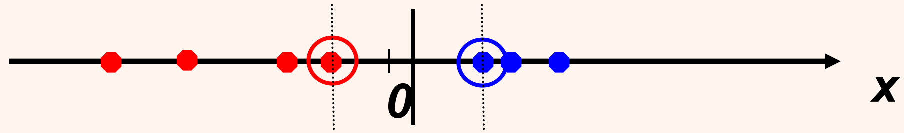
$$0\le\alpha_i\le C$$

بقیه مراحل مانند حالت قبل خواهد بود:

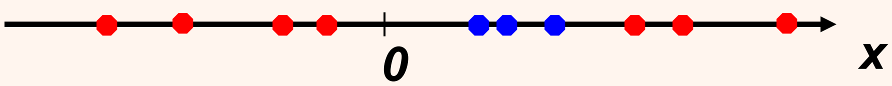
$$W_{op}=\sum_{i=1}^{N_s}\alpha_i d_i X_i$$

# SVM غیرخطی

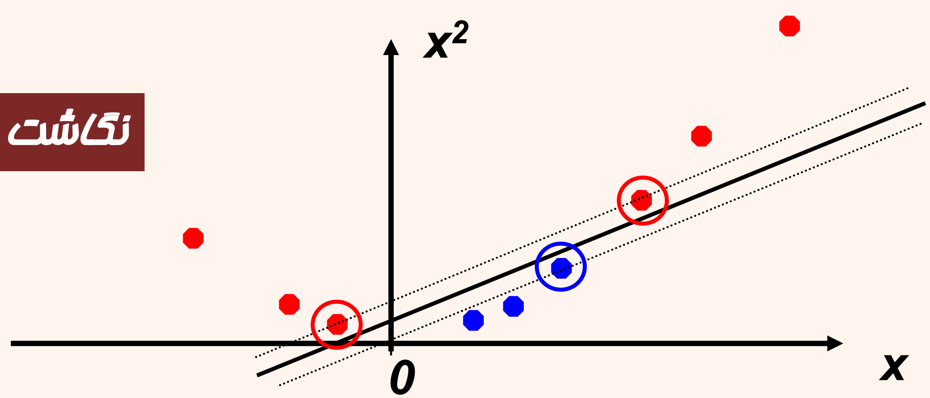
- برای داده‌هایی که قابلیت جداسازی خطی دارند، عملکرد سیستم بسیار خوب است.




- اگر داده‌ها به صورت‌های زیر باشد، مسأله چگونه حل می‌شود؟

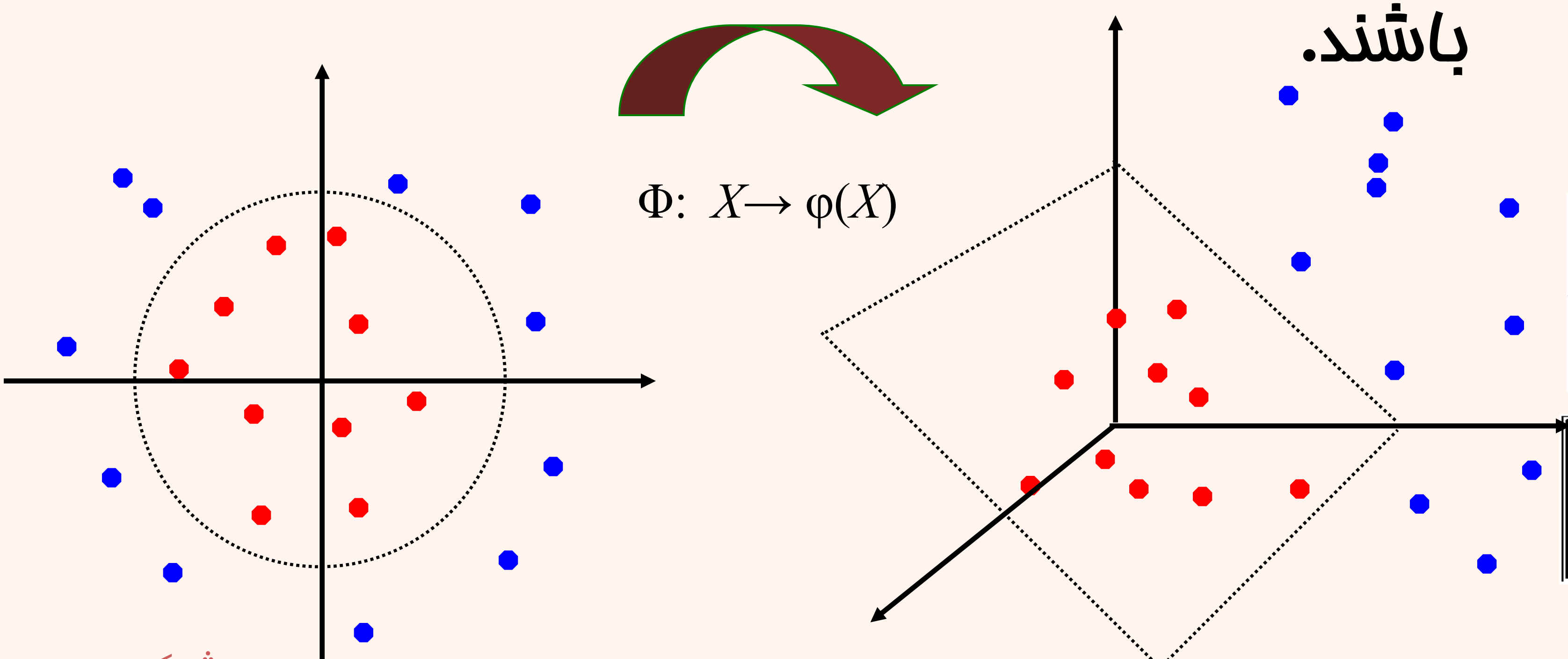



***نگاشت به یک فضای High Dimension***



# نگاشت به فضای بالاتر

- همواره فضای ورودی می‌تواند به فضایی با ابعاد بالاتر نگاشت گردد.
- این نگاشت می‌تواند به صورتی باشد که در این فضای جدید ورودی‌ها قابلیت جداسازی داشته باشند.




www.cs.utexas.edu/~mooney/cs391L/slides/svm.ppt

# نگاشت به فضای بالاتر

$$\underset{R^{m_0}}{X_i} \longrightarrow \underset{R^{m_1}}{\Phi(X_i)} \xrightarrow{W} \text{خروجی}$$

- داشتیم

$$W^T X + b = 0$$

- هنگامی‌که ورودی‌ها به فضای دیگری نگاشت شوند، برای نگاشت جدید خواهیم داشت:

$$\Phi(X) = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), ........, \varphi_{m_1}(X)]^T$$

- در این حالت هدف یافتن رویه‌ی جداسازی است به‌گونه‌ای که:

$$\sum_{j=1}^{m1} w_j \varphi_j(X) + b = 0$$

# نگاشت به فضای بالاتر

$$\sum_{j=1}^{m1} w_j \varphi_j(X) + b = 0$$

- با فرض $\varphi_0(\mathbf{X}) = 1$
- خواهیم داشت:

$$\sum_{j=0}^{m1} w_j \varphi_j(X) = 0$$

$$\Rightarrow \quad W^T \Phi(X) = 0$$

$$\Phi(X) = [1, \Phi(X)]^T$$

$$W = [b = w_0, w_1, w_2, \ldots\ldots w_{m1}]^T$$

# نگاشت به فضای بالاتر

- در این مرحله تمامی شروط و قیودی که برای جداسازی خطی در نظر گرفتیم وجود دارد تنها به ازای $X_i$ ها $\Phi(X_i)$ در نظر گرفته می‌شود:

$$d_i \sum_{j=0}^{m_1} w_j \varphi_j(X_i) - 1 \geq 0$$

$$W_{opt} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i (\Phi(X_i))$$

اسکالر

$m_1 \times 1$

$$\mathbf{W}_{opt}^T \Phi(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i \Phi^T(\mathbf{X}_i) \Phi(\mathbf{X}) = 0$$

# نگاشت به فضای بالاتر

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i \Phi^T(X_i)\Phi(X) = 0$$

$$K(X_i,X_j)= \varphi(X_i)^T\varphi(X_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i K(X_i, X) = 0$$

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j d_i d_j K(X_i, X_j)$$

تابع kernel، تابعی است که معادل ضرب داخلی دو بردار خصیصه است.

# مثال

$\mathbf{x}=[x_1 \;\; x_2]$;

$K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=(1+\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_j)^2$, $\qquad K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j)$:

$$K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=(1+\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_j)^2 = 1+x_{i1}^2x_{j1}^2+2\,x_{i1}x_{j1}\,x_{i2}x_{j2}+x_{i2}^2x_{j2}^2+2x_{i1}x_{j1}+2x_{i2}x_{j2}$$

$$= [1 \;\; x_{i1}^2 \;\; \sqrt{2}\,x_{i1}x_{i2} \;\; x_{i2}^2 \;\; \sqrt{2}x_{i1} \;\; \sqrt{2}x_{i2}]^{\mathbf{T}}\,[1 \;\; x_{j1}^2 \;\; \sqrt{2}\,x_{j1}x_{j2} \;\; x_{j2}^2 \;\; \sqrt{2}x_{j1} \;\; \sqrt{2}x_{j2}]$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j),$$

where $\boldsymbol{\varphi}(X) = [1 \;\; x_1^2 \;\; \sqrt{2}\,x_1x_2 \;\; x_2^2 \;\; \sqrt{2}x_1 \;\; \sqrt{2}x_2]$

## Mercer's theorem:

**Every semi-positive definite symmetric function is a kernel**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $K(X_1, X_1)$ | $K(X_1, X_2)$ | $K(X_1, X_3)$ | … | $K(X_1, X_n)$ |
| $K(X_2, X_1)$ | $K(X_2, X_2)$ | $K(X_2, X_3)$ | | $K(X_2, X_n)$ |
| | | | | |
| … | … | … | … | … |
| $K(X_n, X_1)$ | $K(X_n, X_2)$ | $K(X_n, X_3)$ | … | $K(X_n, X_n)$ |

# نگاشت به فضای بالاتر

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j d_i d_j \underbrace{\Phi(X_i)\Phi(X_j)}_{K(X_i, X_j)}$$

$$K_{N\times N} = \left\{K(X_i, X_j)\right\}_{i,j=1}^{N}$$

ماتریس متقارن

هدف یافتن ضرایب لاگرانژ بیشینه در عبارت زیر است:

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j d_i d_j K(X_i, X_j)$$

با در نظر گرفتن قیود زیر

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i = 0$$

$$0 \le \alpha_i \le C$$

**kernel trick**

در صورت یافتن تابع kernel مناسب بدون این که درگیر مشکلات فضای با ابعاد بالا (نکبت ابعاد) شویم، تنها از نتیجه این نگاشت بهره می‌بریم.

$$\boxed{g(X) = \sum \alpha_i d_i K(X_i, X) + b}$$

# توابع نگاشت

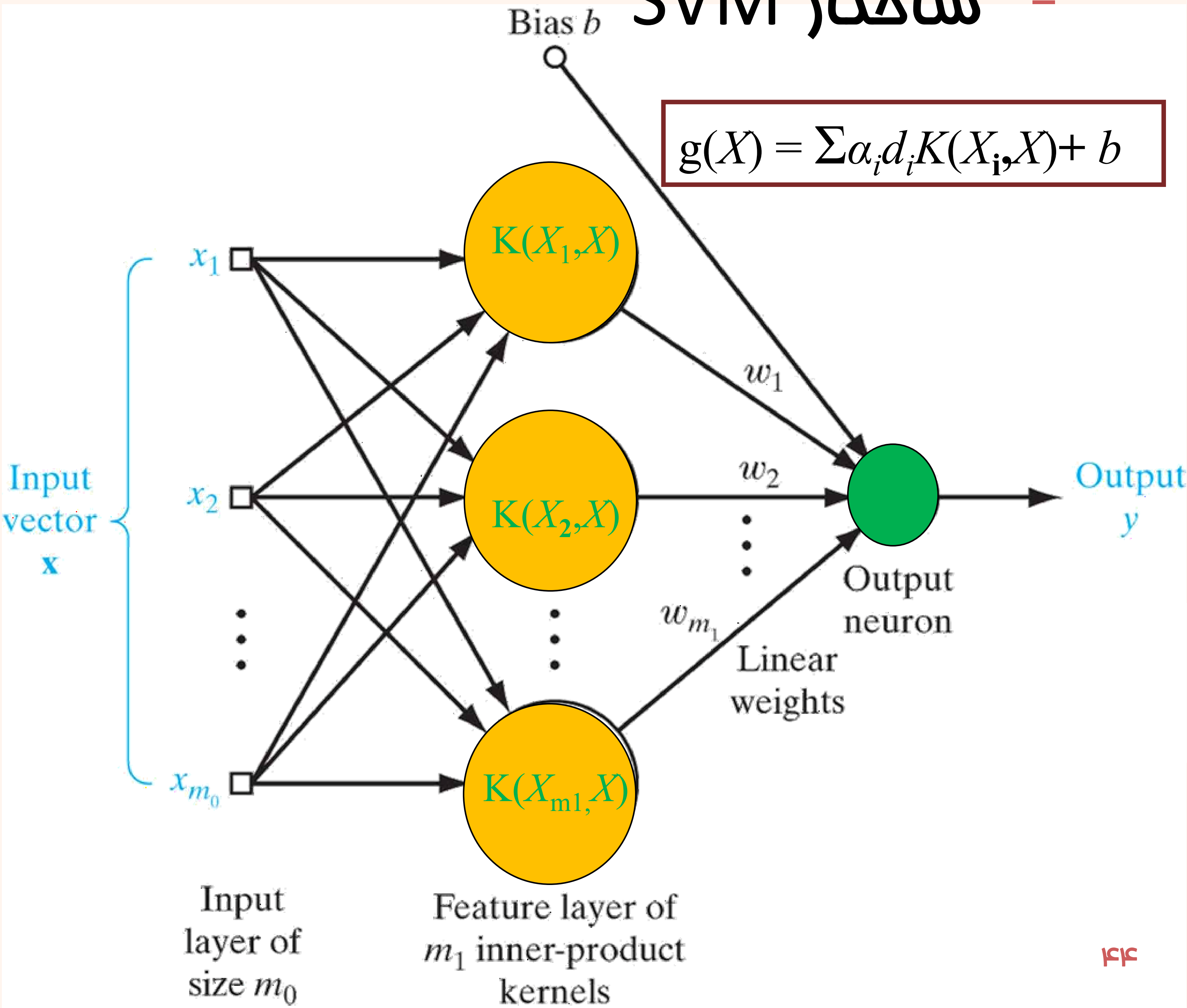
| TABLE 6.1 Summary of Mercer Kernels | | |
|---|---|---|
| Type of support vector machine | Mercer kernel $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), i = 1, 2, ..., N$ | Comments |
| Polynomial learning machine | $(\mathbf{x}^T\mathbf{x}_i + 1)^p$ | Power $p$ is specified *a priori* by the user |
| Radial-basis-function network | $\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2\right)$ | The width $\sigma^2$, common to all the kernels, is specified *a priori* by the user |
| Two-layer perceptron | $\tanh(\beta_0\mathbf{x}^T\mathbf{x}_i + \beta_1)$ | Mercer's theorem is satisfied only for some values of $\beta_0$ and $\beta_1$ |

***chi-squared kernel***

$$k(x, y) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)^2}{\frac{1}{2}(x_i + y_i)}$$

# ساختار SVM

$$g(X) = \Sigma \alpha_i d_i K(X_\mathbf{i}, X) + b$$



# چند نکته

- SVM به گونه‌ای است که به شیوه‌های رایج برای طراحی شبکه‌های RBF و MLP نیازی ندارد.
  - در SVM، ابعاد فضای خصیصه توسط بردارهای پشتیبان مشخص می‌شود.
  - تعداد توابع شعاعی مورد استفاده و مراکز آن به صورت خودکار مشخص می‌گردد (RBF network).
  - تعداد لایه‌های مخفی و وزن‌ها به صورت خودکار مشخص می‌شود(two-layer perceptron).
- پیچیدگی مسأله به ابعاد داده‌ها بستگی ندارد.

# مثال XOR Problem

$$N = 4$$

$$X_1 = [-1\ \text{-}1] \rightarrow \mathrm{d}_1 = -1$$

$$X_2 = [-1\ 1] \rightarrow \mathrm{d}_2 = +1$$

$$X_3 = [1\ \text{-}1] \rightarrow \mathrm{d}_3 = +1$$

$$X_4 = [1\ 1] \rightarrow \mathrm{d}_4 = -1$$

$$K(X, X_i) = \Phi^T(X).\Phi(X_i)$$

$$K(X, X_i) = (1 + X^T X_i)^2$$

- نمونه‌های آموزشی دو بعدی هستند.

# XOR Problem

$$X_i = [x_{i1} \;\; x_{i2}]$$

$$X = [x_1 \;\; x_2]$$

$$K(X, X_i) = (1 + X^T X_i)^2$$

$$= (1 + [x_{i1} \;\; x_{i2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})^2 = (1 + x_{i1}x_1 + x_{i2}x_2)^2$$

$$= 1 + x_1^2 x_{i1}^2 + 2x_1x_2x_{i1}x_{i2} + x_{i2}^2 x_2^2 + 2x_1x_{i1} + 2x_2x_{i2}$$

- حال اگر بخواهیم پاسخ به‌دست آمده را با ضرب داخلی دو بردار $\phi(X)$ و $\phi(X_i)$ نشان دهیم خواهیم داشت:

# XOR Problem

$$= 1 + x_1^2 x_{i1}^2 + 2x_1 x_2 x_{i1} x_{i2} + x_{i2}^2 x_2^2 + 2x_1 x_{i1} + 2x_2 x_{i2}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(X) = [1, x_1^2, \sqrt{2}x_1 x_2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_i) = [1 + x_{i1}^2, \sqrt{2}x_{i1} x_{i2}, x_{i2}^2, \sqrt{2}x_{i1}, \sqrt{2}x_{i2}]^T \quad \text{i=1,2,3,4}$$

# XOR Problem

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [1, x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_i) = [1 + x_{i1}^2, \sqrt{2}x_{i1}x_{i2}, x_{i2}^2, \sqrt{2}x_{i1}, \sqrt{2}x_{i2}]^T \quad \text{i=1,2,3,4}$$

$$\begin{array}{l} X_1 = [-1\ \text{-}1] \\ X_2 = [-1\ 1] \\ X_3 = [1\ \text{-}1] \\ X_4 = [1\ 1] \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

# XOR Problem

$$K_{4\times 4}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$K(X,X_i)=(1+X^TX_i)^2 \qquad K_{4\times 4}=\begin{bmatrix}9 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 9 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 9\end{bmatrix}$$

# XOR Problem

$$N = 4$$

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j d_i d_j K(X_i, X_j)$$

$$\begin{aligned}Q(\alpha) = {} & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ & -\frac{1}{2}(9\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2 + 9\alpha_3^2 + 9\alpha_4^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_3\alpha_4)\end{aligned}$$

- دست آوردن $\alpha_i$ها بهینه منجر به روابط زیر می‌شود:

# XOR Problem

$$\left.\begin{aligned}
&1-9\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\
&1+\alpha_1-9\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0\\
&1+\alpha_1-\alpha_2-9\alpha_3-\alpha_4=0\\
&1-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-9\alpha_4=0
\end{aligned}\right\}\quad
\begin{aligned}
&\alpha_i=\frac{1}{8}\\
&Q(\alpha)=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- بنابراین هر چهار ورودی،  بردار پشتیبان هستند.
- پس از محاسبه‌ی α ها $W_{opt}$ را محاسبه می‌کنیم:

# XOR Problem

- جهت محاسبه‌ی اندازه‌ی وزن بهینه داریم:

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\right\|^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \left\|\mathbf{W}_{\mathrm{opt}}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- داشتیم:

$$W_{opt}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i . d_i(\varphi_j(X_i))$$

$$\mathbf{w}_o=\frac{1}{8}[-\varphi(\mathbf{x}_1)+\varphi(\mathbf{x}_2)+\varphi(\mathbf{x}_3)-\varphi(\mathbf{x}_4)]$$

$$=\frac{1}{8}\left[-\begin{bmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\\1\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\\1\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

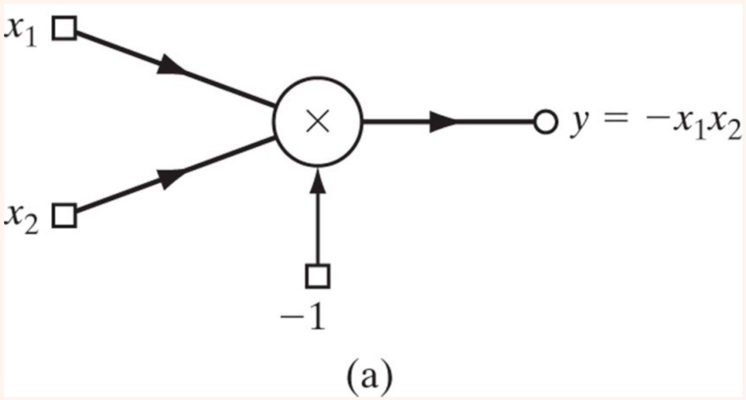
# XOR Problem

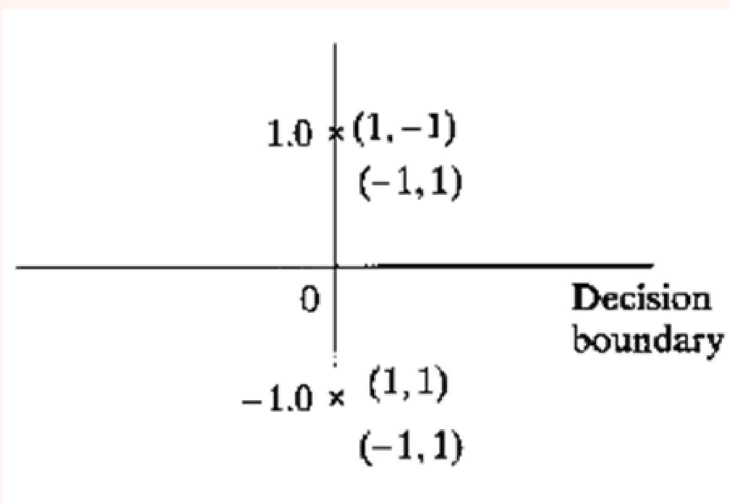
- رویه‌ی بهینه به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$W_{opt}^{T}\varphi(X) = 0$$

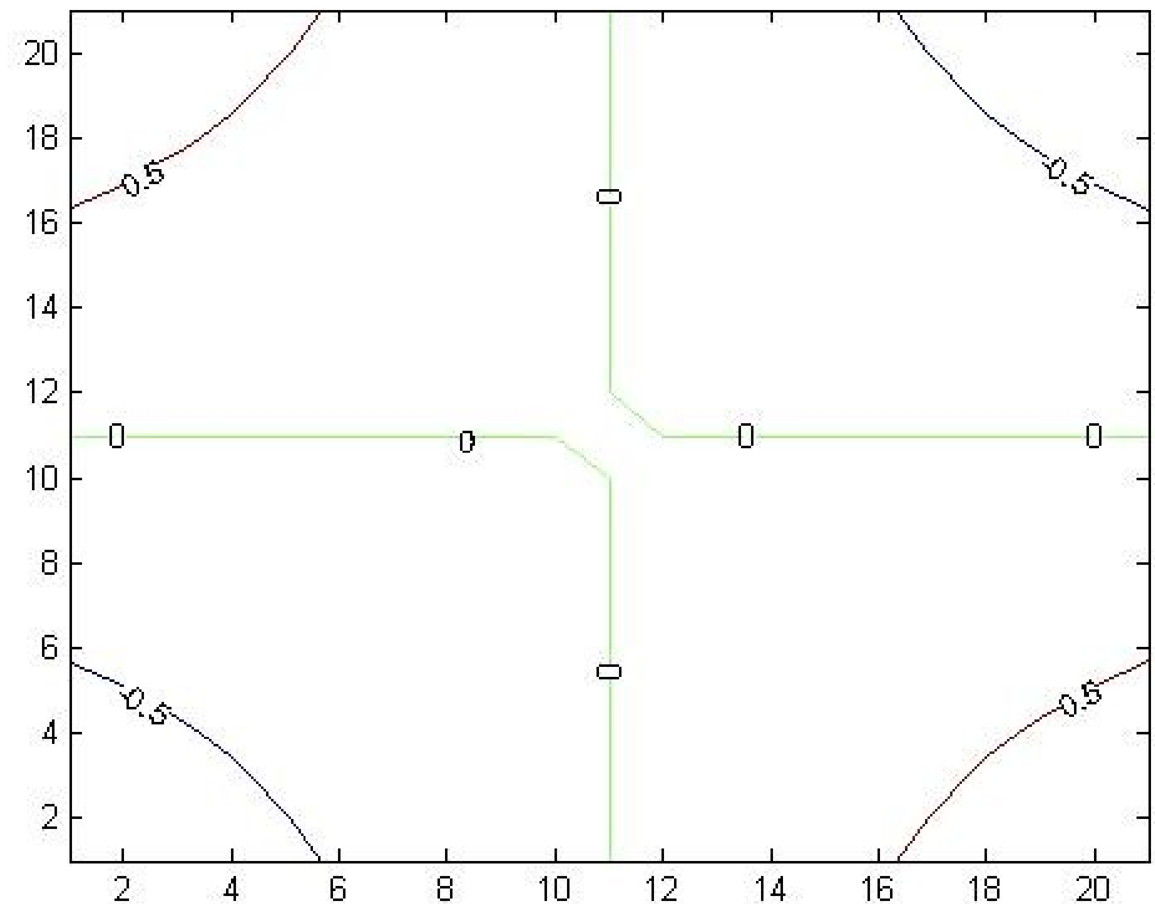
$$\left[0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right]\begin{bmatrix} 1 \\ x_1^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1 \\ \sqrt{2}x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -x_1x_2 = 0$$

# XOR Problem



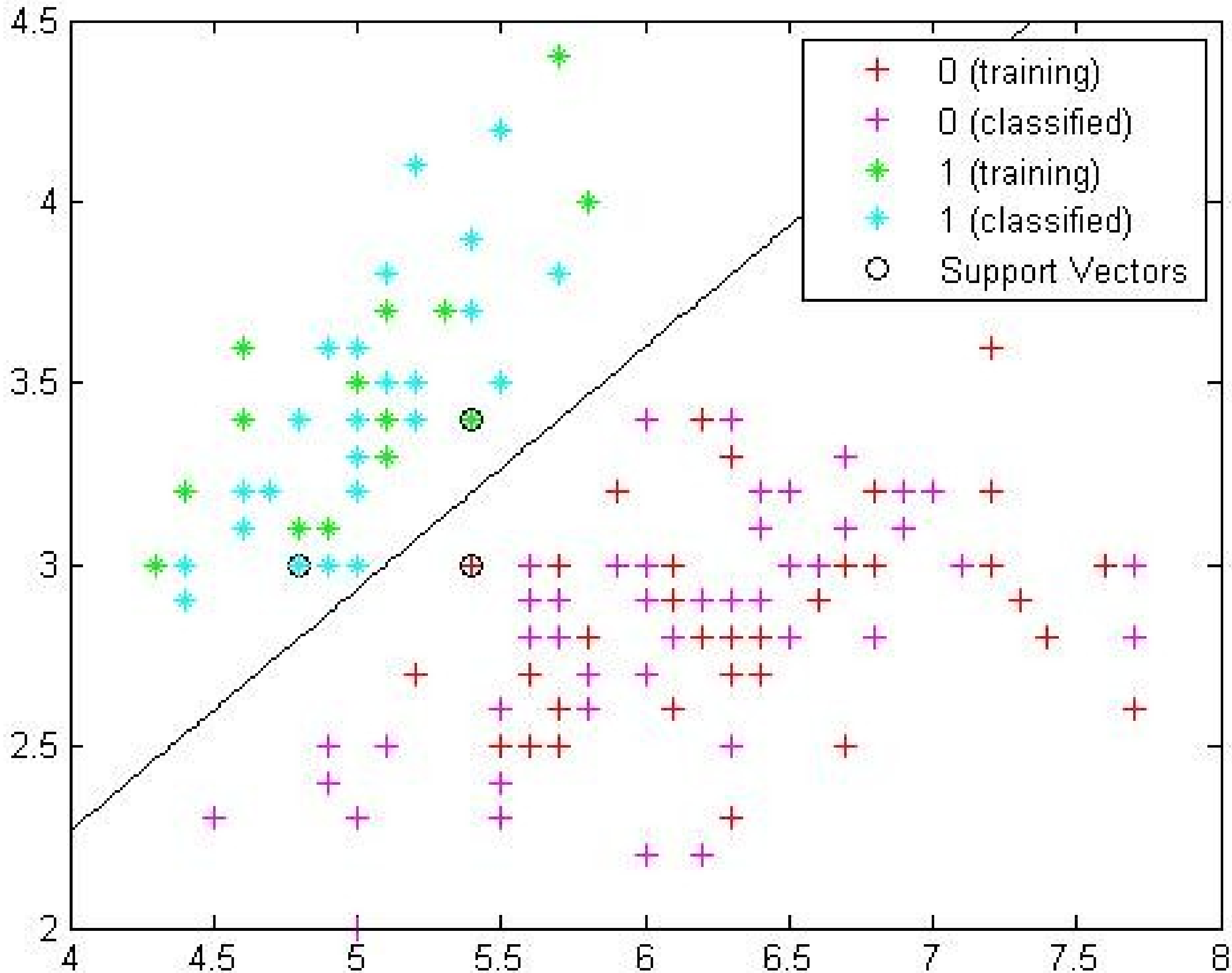

(a) Polynomial machine for solving the XOR problem. (b) Induced images in the feature space due to the four data points of the XOR problem.



20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0.5
0.5
0.5
0.5
0
0
0
0
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

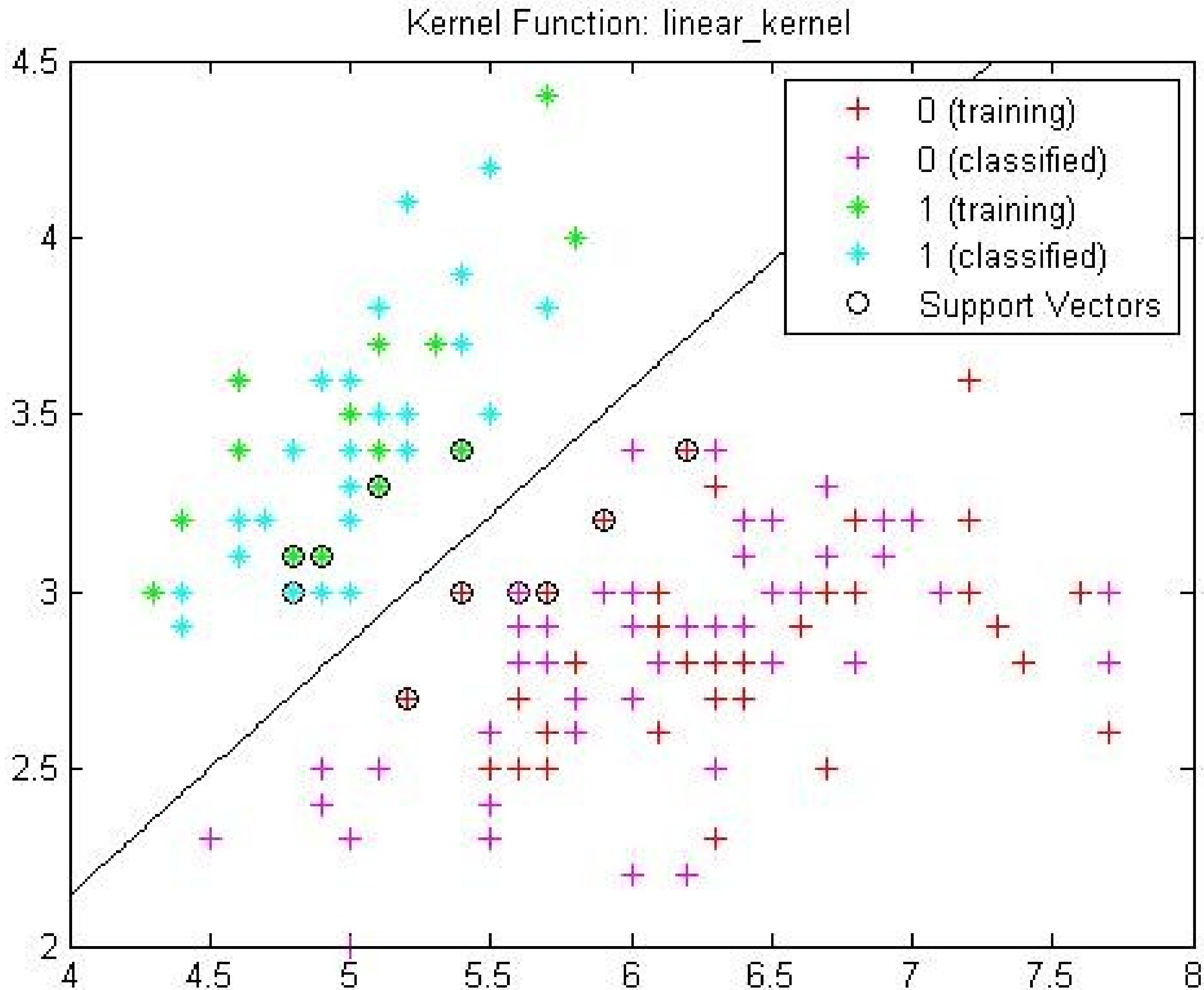
# مثال

```
clear all;
close all;
load fisheriris
data = [meas(:,1), meas(:,2)];
groups = ismember(species,'setosa');
[train, test] = crossvalind('holdOut',groups);
cp = classperf(groups);
svmStruct =
svmtrain(data(train,:),groups(train),'showplot',true,'boxconstr
aint',1e6);
title(sprintf('Kernel Function: %s',...
    func2str(svmStruct.KernelFunction)),...
    'interpreter','none');
classes = svmclassify(svmStruct,data(test,:),'showplot',true);
classperf(cp,classes,test);
cp.CorrectRate
```


0 (training)
0 (classified)
1 (training)
1 (classified)
Support Vectors
4.5
4
3.5
3
2.5
2
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8

# مثال

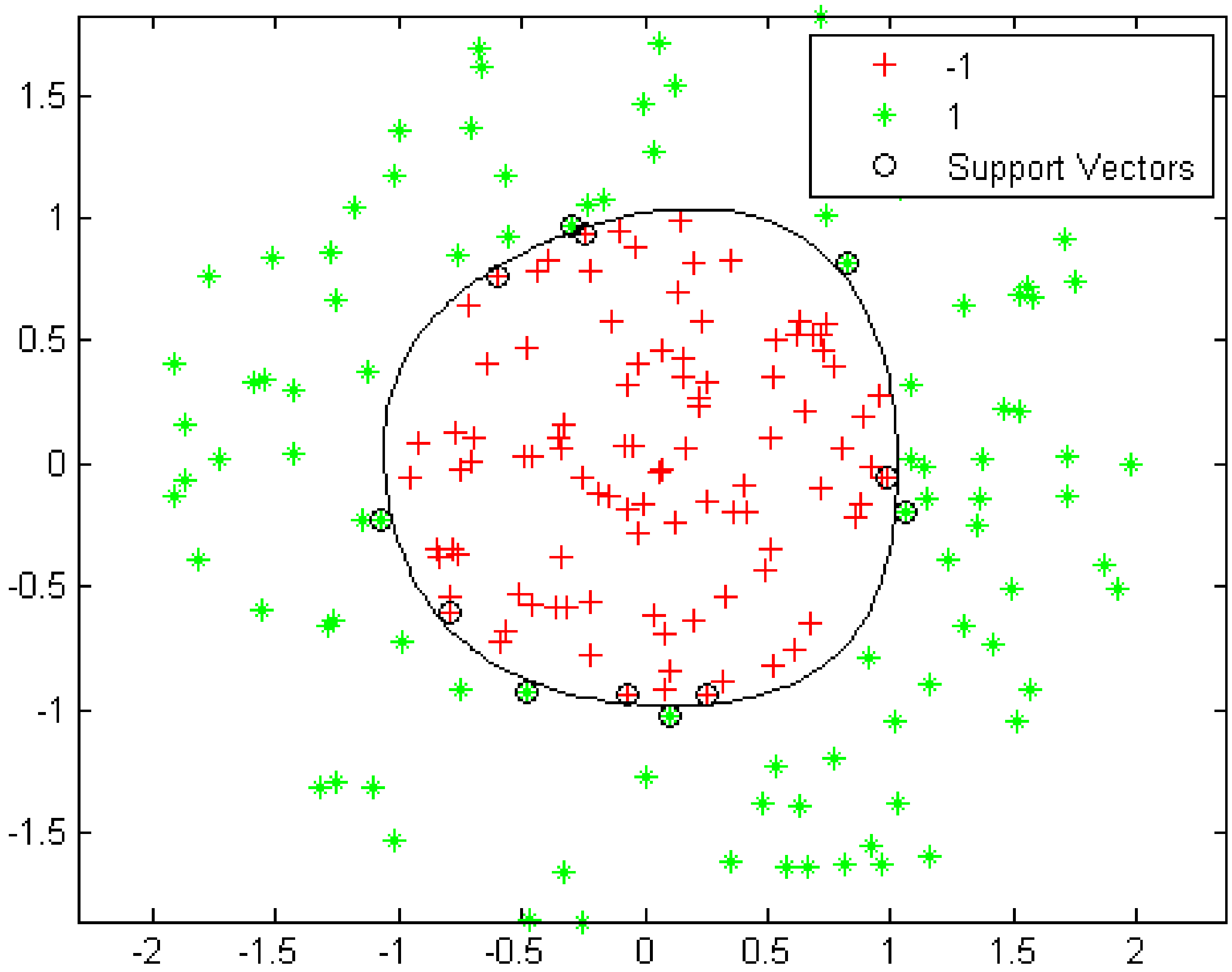
```
clear all;
close all;
load fisheriris
data = [meas(:,1), meas(:,2)];
groups = ismember(species,'setosa');
[train, test] = crossvalind('holdOut',groups);
cp = classperf(groups);
svmStruct = svmtrain(data(train,:),groups(train),'showplot',true);
title(sprintf('Kernel Function: %s',...
    func2str(svmStruct.KernelFunction)),...
    'interpreter','none');
classes = svmclassify(svmStruct,data(test,:),'showplot',true);
classperf(cp,classes,test);
cp.CorrectRate
```



Kernel Function: linear_kernel
0 (training)
0 (classified)
1 (training)
1 (classified)
Support Vectors
4.5
4
3.5
3
2.5
2
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8

# مثال

```
r = sqrt(rand(100,1)); % radius
t = 2*pi*rand(100,1); % angle
data1 = [r.*cos(t), r.*sin(t)]; % points
r2 = sqrt(3*rand(100,1)+1); % radius
t2 = 2*pi*rand(100,1); % angle
data2 = [r2.*cos(t2), r2.*sin(t2)]; % points
plot(data1(:,1),data1(:,2),'r.')
plot(data2(:,1),data2(:,2),'b.')
axis equal
data3 = [data1;data2];
theclass = ones(200,1);
theclass(1:100) = -1;
cl = svmtrain(data3,theclass,'Kernel_Function','rbf',...
    'boxconstraint',Inf,'showplot',true);
hold on
axis equal
```


-1
1
Support Vectors
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2