شبکه‌های عصبی مصنوعی
۰۱-۷۱۳-۱۱-۱۳
بخش نخست

Hebb's rule
perceptron
LMS, ADALINE

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
زمستان ۱۳۹۲
احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

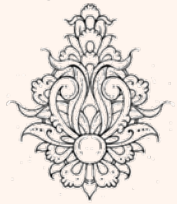
- چرا شبکه‌ی عصبی
- شبکه‌های عصبی زیستی
- مدل ریاضی تک‌نرون
- الگوریتم یادگیری
- پرسپترون
- قضیه‌ی همگرایی
- نزول گرادیان
- تنظیم نرخ یادگیری

چرا شبکه‌ی عصبی؟

- چگونه می‌توان برنامه‌ای نوشت که هویت یک فرد را از طریق چهره تشخیص دهد یا برنامه‌ای که بتواند اشیاء متفاوت را طبقه‌بندی کند؟
- یا برنامه‌ای که با توجه به سابقه‌ی پزشکی و خانوادگی فرد، عمر تقریبی او را حدس بزند!
  - نوشتن چنین برنامه‌هایی بسیار دشوار است، در حالی که مغز انسان ۱۰۰ تا ۲۰۰ میلی‌ثانیه چنین پردازشی را انجام می‌دهد.
  - در این موارد با داده‌های حجیمی روبرو هستیم که ارتباط کاملا دقیق و مشخصی بین آن‌ها برقرار نیست و یا کشف این ارتباط بسیار دشوار است.
  - نمی‌دانیم مغز ما چگونه‌ی چنین کارهایی را انجام می‌دهد.
  - نکته‌ی دیگر این که در مواردی، این ارتباط با مرور زمان تغییر خواهند کرد و این باعث دشواری بیشتر مسأله خواهد شد.

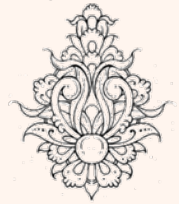
رویکرد یادگیری ماشین

- در الگوریتم‌های «یادگیری ماشین»، تعداد زیادی مثال همراه با پاسخ صحیح دریافت و برنامه‌ای برای حل مسأله تولید می‌کند.
  - در صورت انجام درست کار، برنامه برای نمونه‌های جدید هم درست کار خواهد کرد(**تعمیم‌پذیری**).
  - در صورتی که داده‌ها تغییر کنند، برنامه هم توانایی تغییر خواهد داشت(**وفقی بودن**).
- با توجه به افزایش قدرت محاسبات، انجام حجم عظیمی از محاسبات ارزان‌تر از نوشتن یک الگوریتم خاص می‌باشد.



مثال

- بازشناسی الگو
  - تشخیص اشیاء
  - تشخیص چهره، یا تشخیص حالا چهره
  - تشخیص کلمات
- تشخیص ناهنجاری
  - استفاده از کارت اعتباری به صورت نامتعارف
- پیش‌بینی
  - پیش‌بینی قیمت سهام
  - پیش‌بینی لیست فیلم‌های مورد علاقه‌ی یک شخص

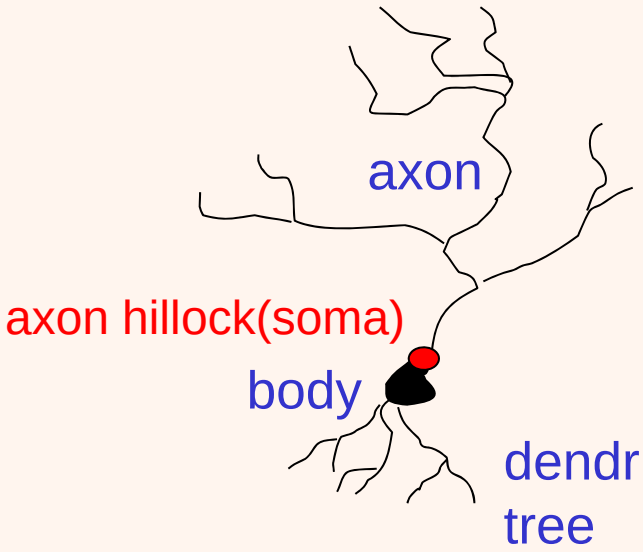


شبکه‌های عصبی مصنوعی

- ایده‌ی اصلی این شبکه‌ها مبتنی بر «شبکه‌های عصبی زیستی» است.
- بسیاری از مسائل توسط انسان به سادگی قابل حل می‌باشد.
- مغز به صورت موازی محاسبات را انجام می‌دهد.
- این مدل می‌تواند برای مسائلی که توسط ذهن آدمی به راحتی انجام می‌شود، مفید باشد.
- در واقع شیوه‌ی به کار رفته در ذهن به نوعی الهام بخش ارائه‌ی مدلی برای ایجاد قابلیت‌هایی مشابه با مغز است.

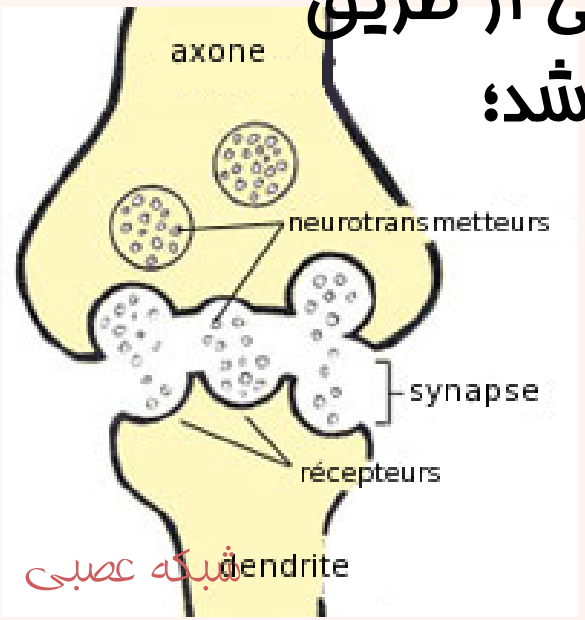
ساختار یک نرون طبیعی

- مغز انسان شامل حدود یک میلیارد نرون است که به صورت فوق‌العاده‌ای به هم پیوسته هستند.
- شامل یک آسه(آکسون) است که شاخه شاخه شده و پیام‌های الکتریکی را به بیرون یاخته هدایت می‌کند.
- یک خوشه از دارینه(دندریت)ها که پیام‌های الکتریکی را از سلول‌های مجاور دریافت می‌کند.

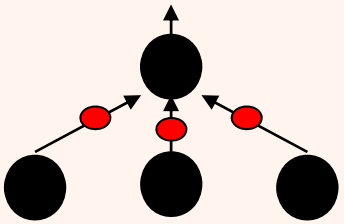


ساختار یک نرون طبیعی(ادامه...)

- همایه(سیناپس) یک ساختار زیستی در پایانه آکسون‌ها است که از راه آن یک سلول عصبی پیام خود را به دندریت یک نورون دیگر یا یاخته ماهیچه‌ای یا یک غده می‌فرستد.
- جسم سلولی مولد این سیگنال‌های ارسالی است. در صورتی که میزان سیگنال دریافتی از طریق دارینه‌ها از یک حد آستانه بیشتر باشد؛ نرون تحریک می‌شود.



شبکه عصبی



مغز چگونه کار می‌کند؟

- هر نرون از نرون‌های دیگری ورودی دریافت می‌کند.
- برخی نرون‌های به سلول‌های گیرنده(receptor) متصل هستند.
- نرون‌ها با ارسال سیگنال‌های الکتریکی با یکدیگر ارتباط برقرار می‌کنند.
- اثر هر ورودی به وزن ارتباط سیناپسی بستگی دارد.
- این وزن‌ها به صورت وفقی تغییر می‌یابند تا کل شبکه محاسبات را به درستی انجام دهد.

مغز چگونه کار می‌کند؟(ادامه...)

- هر بخش قشر مغز وظیفه‌ای خاص دارد.
  - آسیب به هر بخش از مغز یک انسان بالغ، باعث تاثیرات خاصی می‌شود.
  - در صورت انجام فعالیت‌های خاص جریان خون در بخشی از بخش‌ها افزایش می‌یابد.
- بخش‌های مختلف قشر مغز(cortex) بسیار شبیه به هم هستند.
  - در صورتی که در بخشی از آن آسیب ببیند، بخش دیگر می‌تواند عهده‌دار وظیفه‌ی آن بخش شود، در واقع به نظر می‌رسد همه‌ی بخش‌ها از یک شیوه‌ی یادگیری استفاده می‌کنند.

شبکه‌ی عصبی

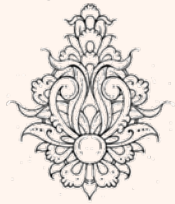
- شبکه‌ی عصبی پردازشگری با ساختار توزیع شده و قابلیت بالای موازی‌سازی است که از واحدهای پردازشگر ساده‌ای تشکیل شده است و قابلیت ذخیره کردن تجربیات و به کارگیری آن برای استفاده‌های آتی را دارا می‌باشد.
  - از طریق یادگیری از محیط اطراف کسب دانش می‌کند.
  - برای ذخیره‌سازی دانش از وزن‌های سیناپسی استفاده می‌کند.

ویژگی‌های شبکه‌های عصبی

- پردازش موازی (سرعت بالا)
- تحمیل‌پذیری
- محاسبات غیرخطی
- برقراری ارتباط یک‌سری ورودی و یک‌سری خروجی
  – بازیابی اطلاعات
- توانایی تطبیق (adaptivity)
- پاسخ به داده‌های نویزی
- تحمل‌پذیری خطا
- یادگیری

نیازمندی‌های شبکه‌های عصبی

- جمع‌آوری و آنالیز مناسب داده
- طرح، آموزش و تست شبکه‌ی عصبی
- بهنجار کردن(normalize) ورودی‌ها:
  - تغییرات باید به نحوی باشد که قابل برگشت بوده و هیستوگرام ورودی را تغییر ندهد.



مدل نرون

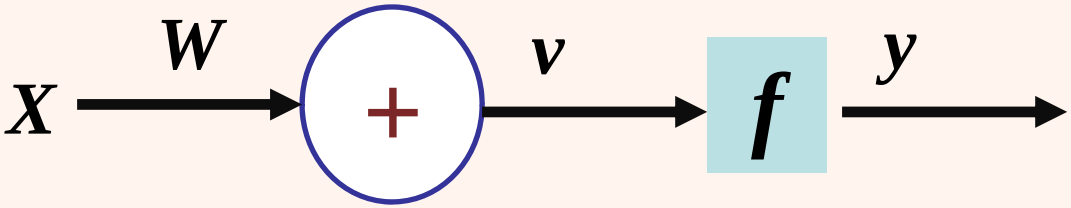
Mcculloch and Pitts 1943

A LOGICAL CALCULUS OF THE IDEAS IMMANENT IN NERVOUS ACTIVITY

WARREN S. MCCULLOCH and WALTER H. PITTS

- کوچک‌ترین واحد پردازشگر اطلاعات

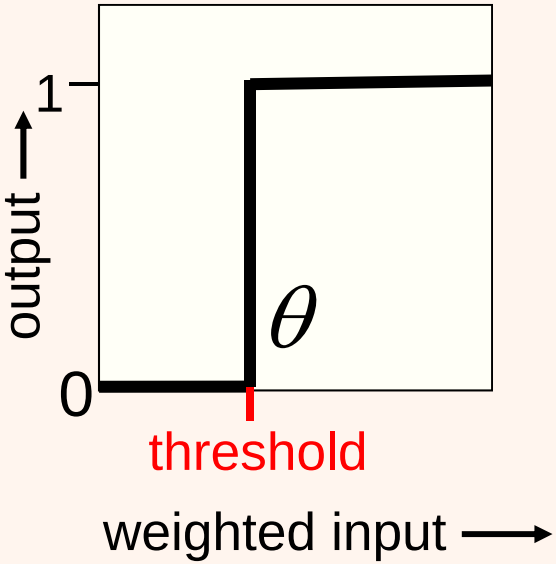
ساختار نرون تک ورودی



$$v = W.X$$

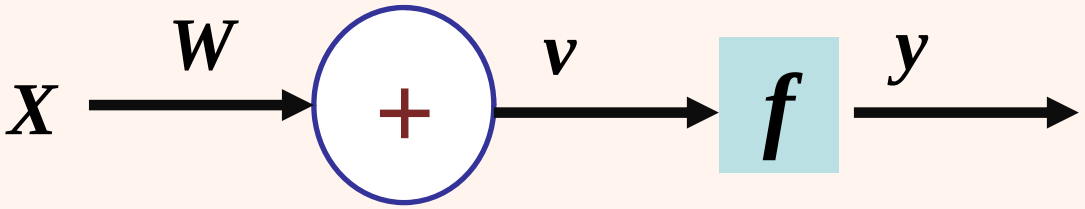
$$y = f(v)$$

$$y = f(W.X)$$



مدل نرون (ادامه...)

- به دو صورت می‌توان چنین نرونی را نمایش داد:



$$v = \sum_i x_i w_i$$

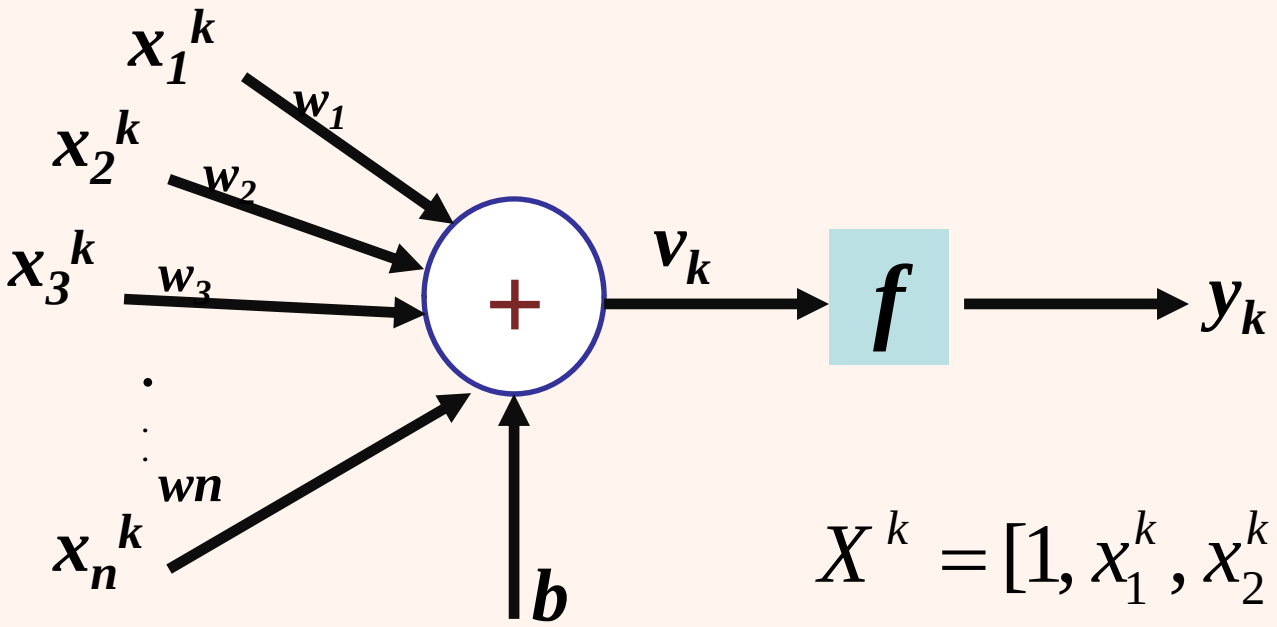
$$v = b + \sum_i x_i w_i$$

$$\theta = -b$$

$$y = \begin{cases} 1 \text{ if } v \geq \theta \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 \text{ if } v \geq 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

مدل ریاضی یک نرون



$$X^k = [1, x_1^k, x_2^k, \ldots\ldots, x_n^k]$$

$$W = [w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n]$$

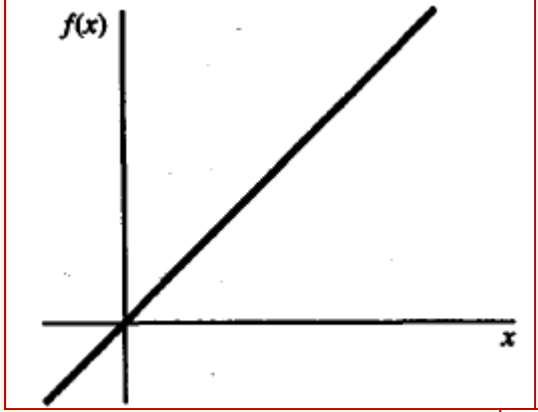
$$u_k = \sum_{i=0}^{n} w_i . x_i^k \quad \Rightarrow \quad u_k = W . X^k$$

$$v_k = u_k + b$$

$$y_k = f\left(\sum_{i=0}^{n} w_i . x_i^k + b \right)$$

تابع انگیزش

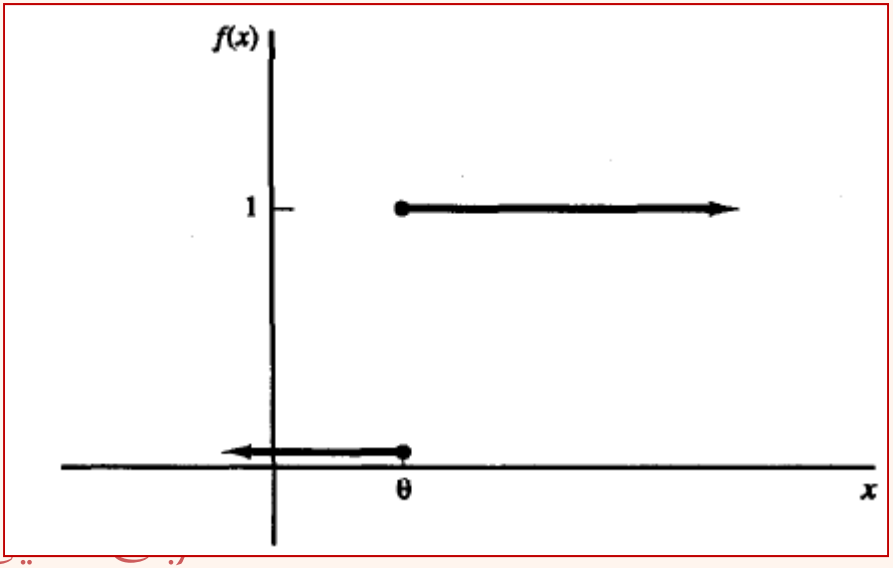
Activation Function



Identity function

$$f(x) = x \qquad \text{for all } x.$$

Binary step function (with threshold θ)

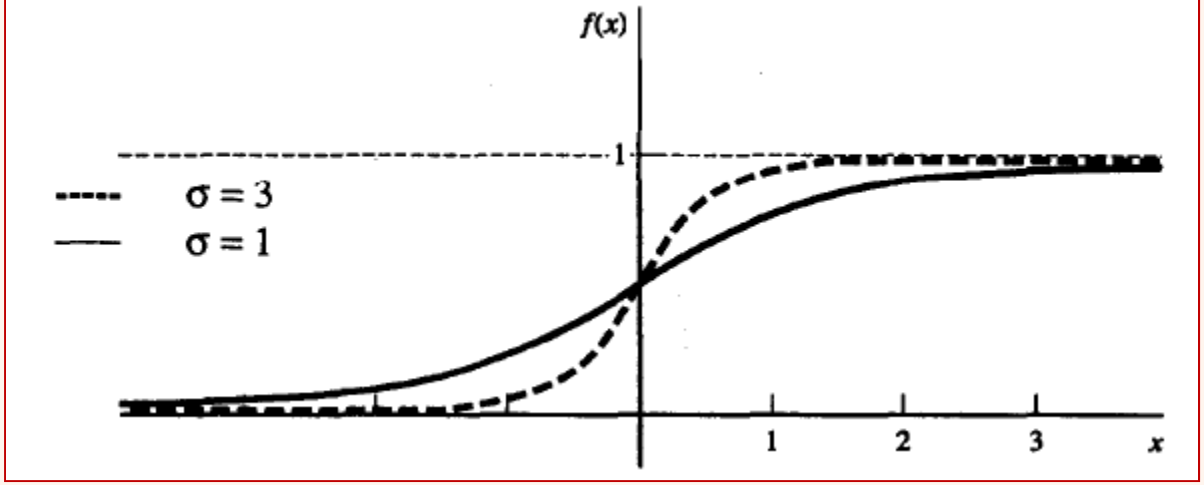


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq \theta \\ 0 & \text{if } x < \theta \end{cases}$$

تابع انگیزش (ادامه...)

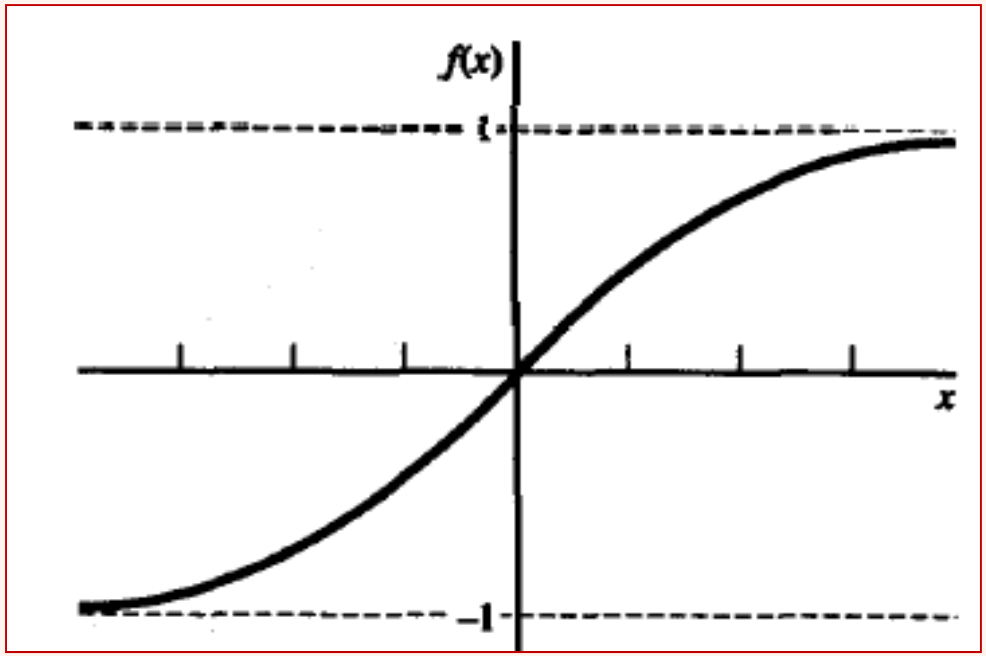
Binary sigmoid

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\sigma x)}$$



تابع انگیزش

Bipolar sigmoid



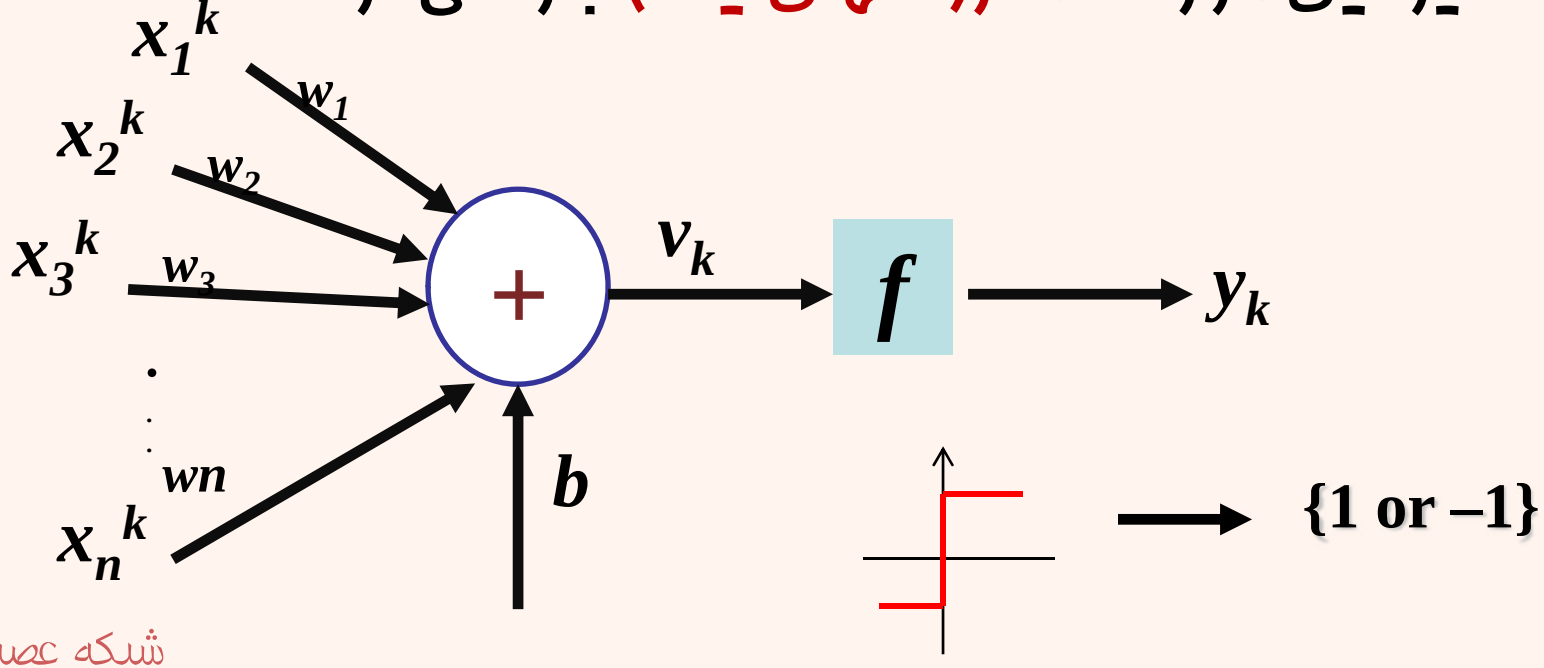
$$g(x) = 2f(x) - 1 = \frac{2}{1 + \exp(-ax)} - 1$$

$$= \frac{1 - \exp(-\sigma x)}{1 + \exp(-\sigma x)}.$$

Rosenblat 1957

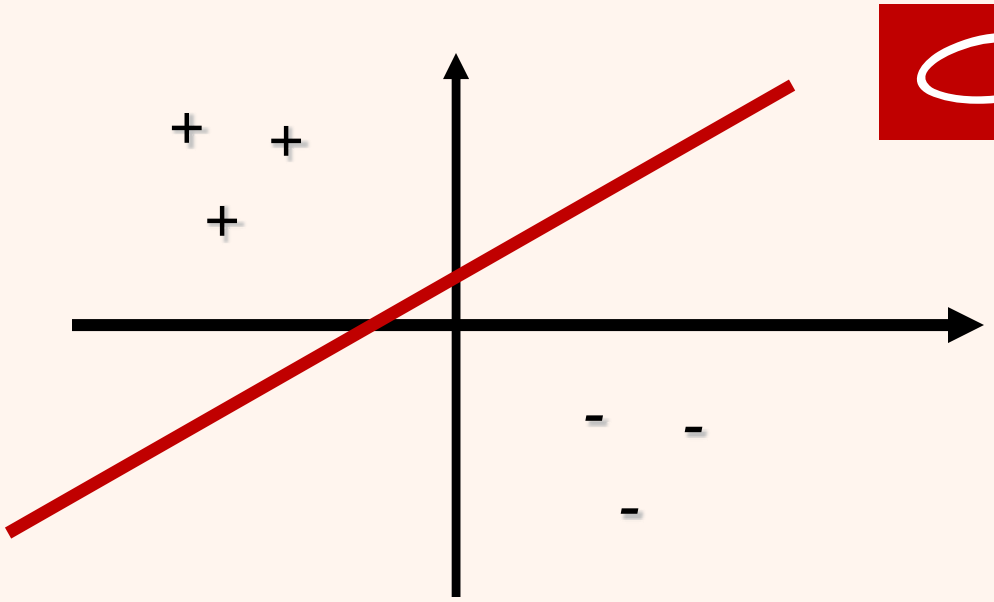
پرسپترون

- یک پرسپترون یک بردار ورودی را گرفته، ترکیبی خطی از آن‌ها را محاسبه نموده، خروجی را فراهم می‌آورد.
- اگر خروجی از میزان آستانه‌ای بالاتر بود یک و در غیر این‌صورت صفر(منهای یک) باز می‌گرداند.



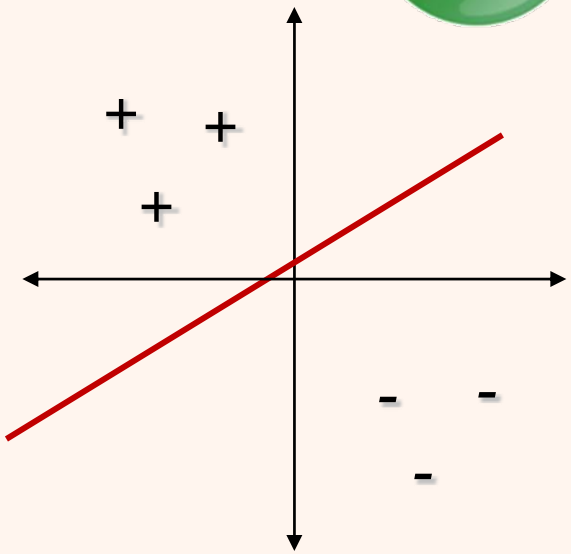
پرسپترون

- پرسپترون توانایی جداسازی داده‌های دوسطحی را داراست.
- می‌توان آن را به صورت یک جداکننده دوسطحی در نظر گرفت.

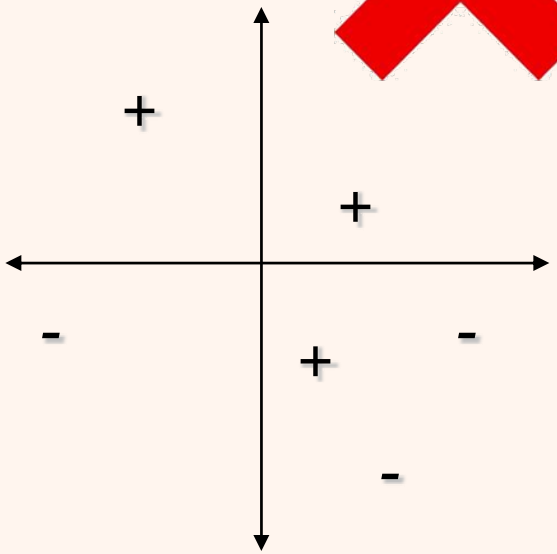


مثال

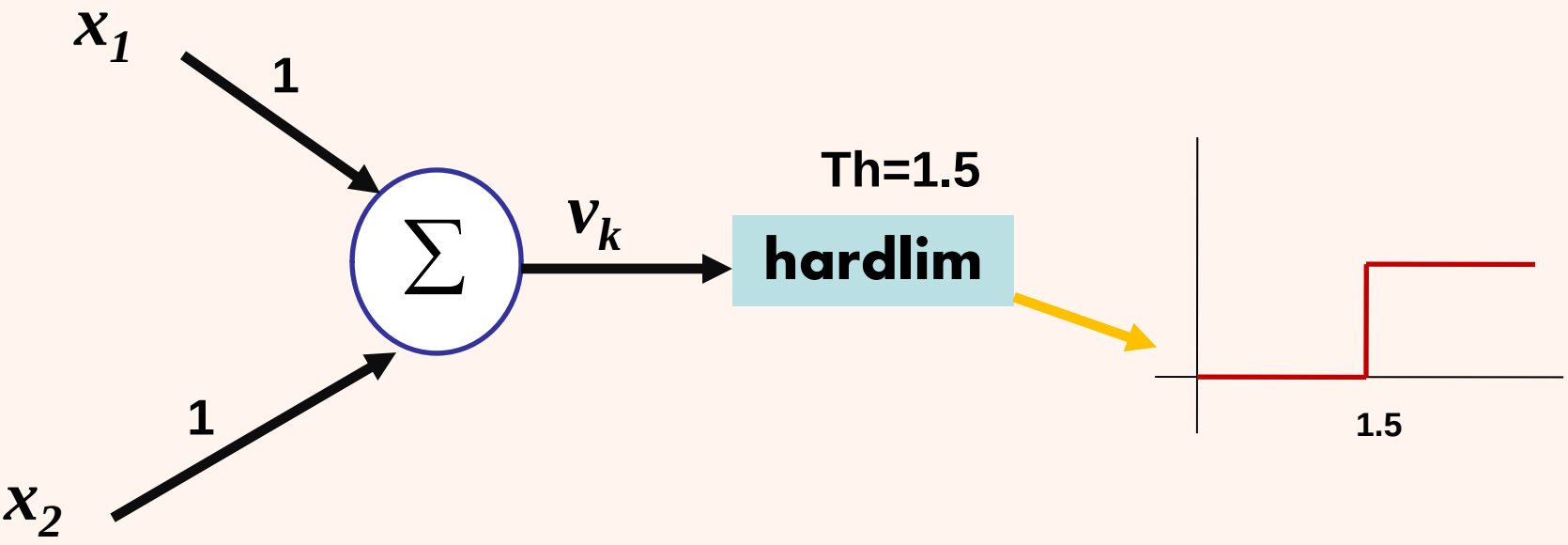
جدایی‌پذیر خطی

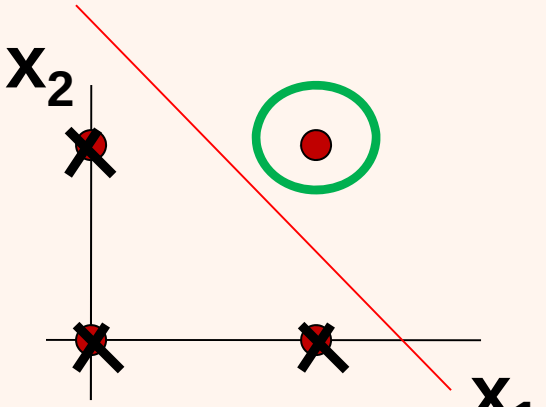


جدایی‌پذیر غیرخطی

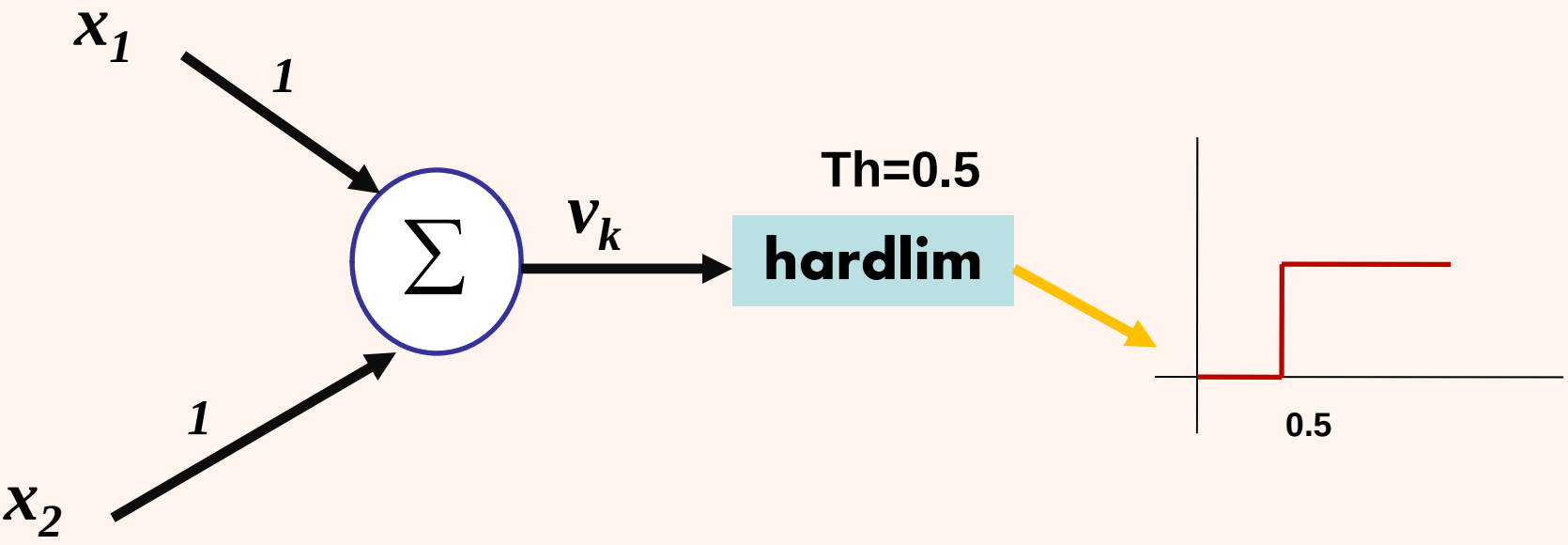


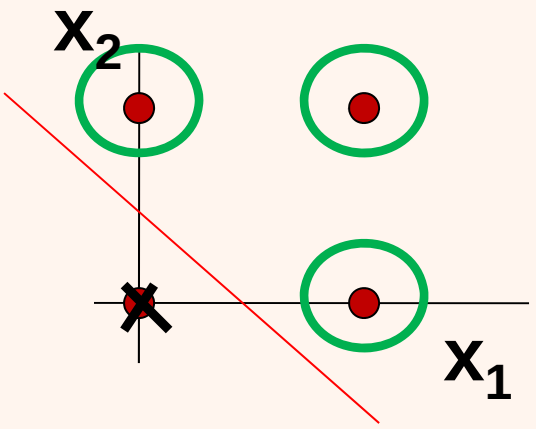
AND Gate



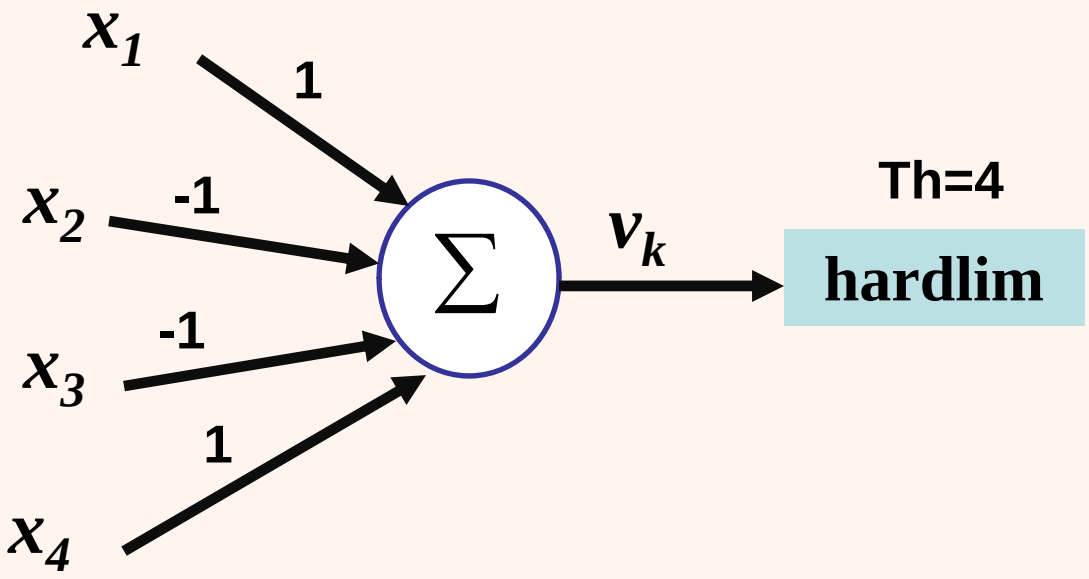


OR Gate



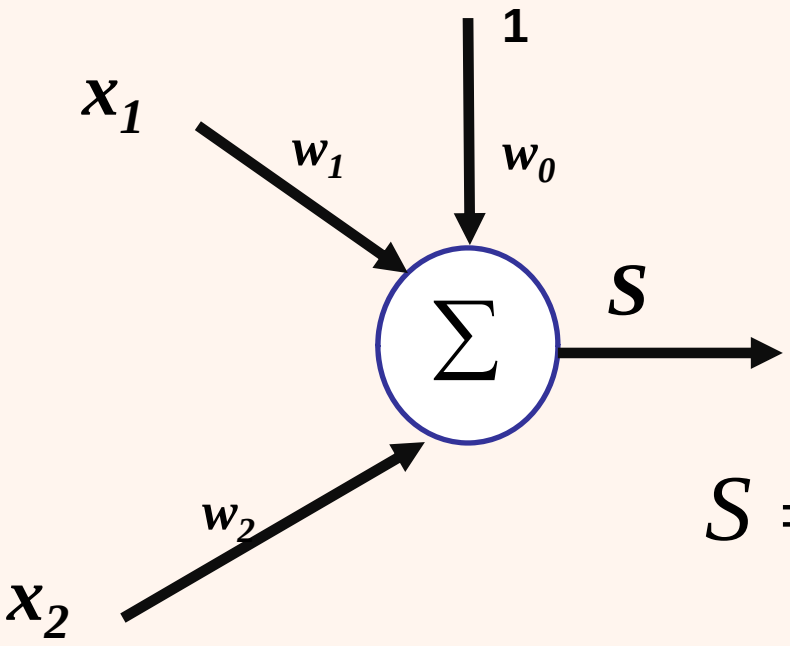


مثال



- به ازای کدام ورودی پاسخ یک است؟

بایاس



$$S = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$$

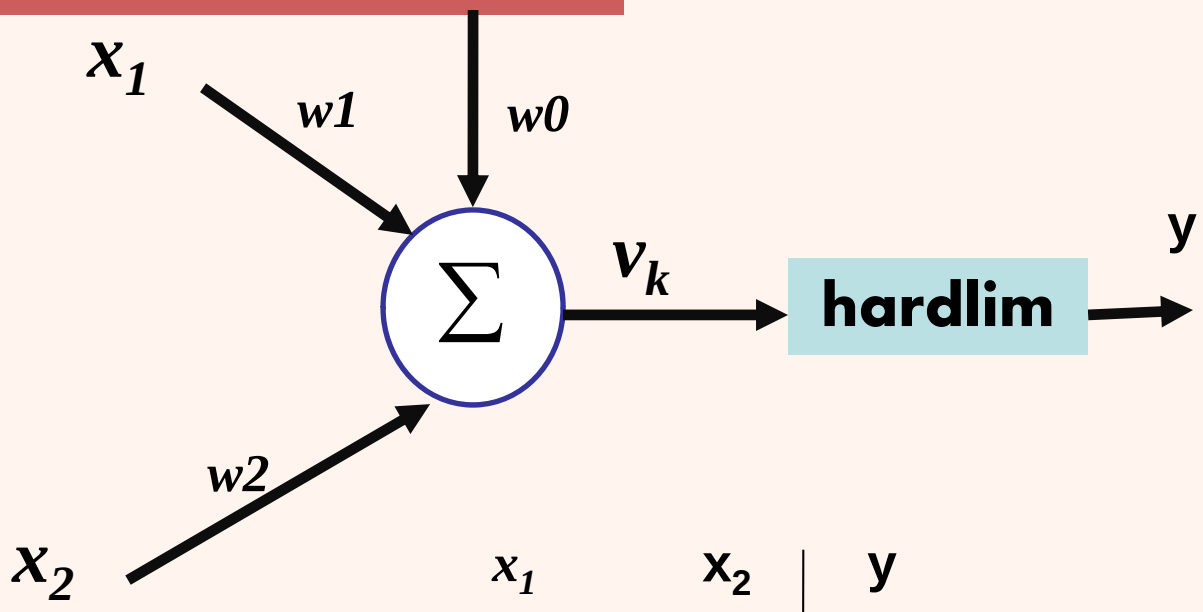
$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 - \frac{w_0}{w_2}$$

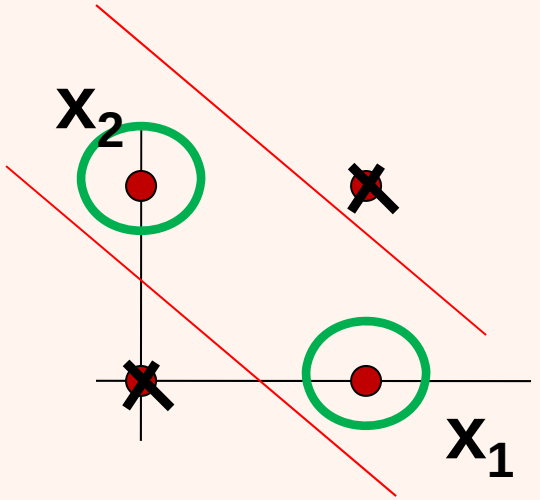
شیب

عرض از مبدا

- به جای تغییر آستانه می توان بایاس را تغییر داد.

XOR Gate





x_1	x_2	y	
1	1	0	$W_1+W_2+W_0<0$
0	0	0	$W_0<0$
1	0	1	$W_1+W_0>0$
0	1	1	$W2+W_0>0$

به وسیله‌ی یک خط جدایی‌پذیر نیستند پس قابلیت جداسازی چنین تابعی را ندارد

هوش مصنوعی و یادگیری

- یادگیری، یکی از مهم‌ترین بخش‌های هوش مصنوعی است. برای هوشمند بودن، یک سیستم که در محیطی با شرایط متغیر قرار دارد، باید توانایی آموختن داشته باشد. در چنین حالتی طراحان نیازی به پیش‌بینی همه‌ی حالات ممکن نخواهند داشت.
- برای حل بسیاری از مسائل در بینایی ماشین، تشخیص صوت، الگوریتم‌های یادگیری به کار می‌آیند.
- شناسایی هویت با کمک چهره یکی از این زمینه‌هاست که در «بازشناسی الگو» مطرح می‌شود.

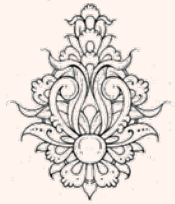
انواع شیوه‌های یادگیری(آموزش)

- یادگیری بانظارت **Supervised learning**
  - یک دسته داده‌ی آموزشی (ورودی و خروجی مطلوب) برای آموزش وجود دارد.
  - کاربردها: درون‌یابی و طبقه‌بندی
  - داده‌های آموزشی دارای برچسب هستند.
- یادگیری بی‌نظارت **Unsupervised learning**
  - مجموعه‌ای داده بدون برچسب وجود دارد، هدف یافتن رابطه‌ای بین داده‌هاست.
- یادگیری نیمه نظارتی **semisupervised learning**
- یادگیری تقویتی: خروجی مطلوب وجود ندارد، بر اساس یک تابع هزینه یا پاداش شبکه آموزش می‌بینند. **Reinforcement learning**

supervised Learning

یادگیری بانظارت

- در این شیوه همراه با نمونه‌های آموزشی، پاسخ مطلوب هم وجود دارد.
  - پیش‌بینی نمونه‌های جدید
  - استخراج دانش
  - فشرده‌سازی
  - تشخیص نمونه‌های غیرنرمال؛ تشخیص تقلب و سوءاستفاده



یادگیری بی‌نظارت

Unsupervised Learning

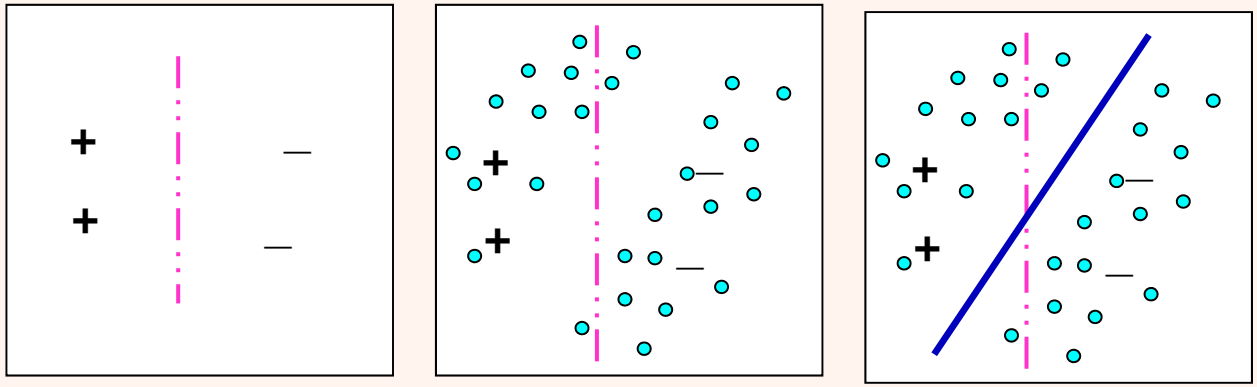
- در این حالت تنها داده‌های ورودی وجود دارند، بدون این که ناظر مقدار مطلوب را مشخص کند.
- هدف پیدا کردن «نظم» (regularity) موجود در داده است، آن‌چه معمول و طبیعی است.

Density estimation

- خوشه‌بندی(clustering): گروه‌بندی نمونه‌های مشابه
  - مدیریت ارتباط با مشتری
  - فشرده‌سازی تصویر(چندی‌سازی رنگ)
  - بیوانفورماتیک(Learning motifs)

یادگیری نیمه‌نظارتی

- تنها بخشی از داده‌ها برچسب خورده‌اند، و حجم زیادی از آن بدون برچسب هستند.
- برچسب زدن داده‌ها کار پرهزینه‌ای است.
- از طرفی، داده‌های برچسب نخورده‌ی زیادی در اختیار داریم.



یادگیری تقویتی

- در برخی موارد خروجی یک سیستم، دنباله‌ای از «کنش»هاست. به گونه‌ای که یک حرکت اهمیت ندارد، بلکه سیاستی است که باعث می‌شود مجموع حرکات، به هدف مناسب برسند.
- یک عمل مناسب است در صورتی که در مجموع و در کنار سایر اعمال مناسب باشد. در این حالت الگوریتم یادگیری باید قادر به انتخاب سیاست مناسب باشد.

Game playing
Robot in a maze
Multiple agents, partial observability, ...

ارزیابی الگوریتم‌های یادگیری

- بسته به کاربرد، برای ارزیابی الگوریتم‌های یادگیری، دقت طبقه‌بندی، حجم محاسبات و حافظه‌ی مورد نیاز در نظر گرفته می‌شود.
- الگوریتم‌های یادگیری متفاوتی وجود دارند؛ بسته به شرایط کاربرد مورد نظر، الگوریتم‌های متفاوتی را می‌توان مورد استفاده قرار داد.
- حجم مورد نیاز داده‌های آموزشی، پیچیدگی الگوریتم‌های مورد استفاده و قابلیت تعمیم مسائلی است که باید مورد بررسی قرار گیرند.

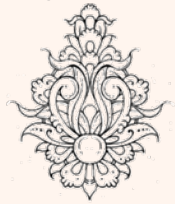
شبکه عصبی

مراحل طراحی یک شبکه‌ی عصبی و الگوریتم‌های آموزش

- انتخاب وزن‌ها به صورت تصادفی
- اعمال مجموعه‌ی آموزشی (training set)

$$M = \left\{ \left(X^1, d^1 \right), \left(X^2, d^2 \right), \cdots \right\}$$

  - اعمال هر ورودی به شبکه و به دست آوردن خروجی
  - مقایسه‌ی خروجی مطلوب و واقعی
  - آموزش شبکه به صورت تغییر وزن‌ها و در جهت نزدیک شدن خروجی مطلوب و واقعی



اولین قانون آموزش

Hebb 1949

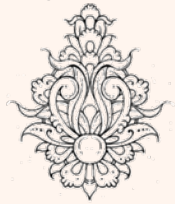
- مقادیر ورودی ۱ و ۱- هستند.
- تابع فعالیت(انگیزش) پله واحد

$$y(t) = f\left[\sum_i w_i(t) x_i\right]$$

$$y(t) = correct \qquad w_i(t+1) = w_i(t)$$

$$y(t) = -1 \qquad w_i(t+1) = w_i(t) + x_i$$

$$y(t) = 1 \qquad w_i(t+1) = w_i(t) - x_i$$

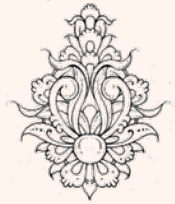


اولین قانون آموزش(ادامه...)

- و نهایتا بدین صورت کامل شد:

$$w_i(t+1) = w_i(t) + d_k x_i^k$$

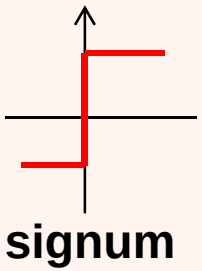
- در صورتی که تابع فعالیت به صورت یکنوا صعودی باشد، بدین ترتیب تغییر وزن‌ها باعث کاهش خطا می‌شود.



مثال

۱

$$X^1 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad -1], \quad d_1 = 1$$
$$X^2 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1], \quad d_2 = -1$$
$$X^3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad d_3 = 1$$



$t = 0, \quad W = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \quad X^1$ ✗ $W_{new} = W_{old} + X^1;$

$t = 1, \quad W = [1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]; \quad X^2$ ✗ $W_{new} = W_{old} - X^2;$

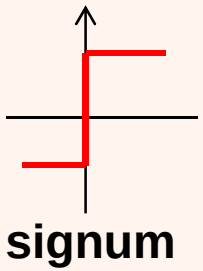
$t = 2, \quad W = [0 \quad -2 \quad 0 \quad 0]; \quad X^3$ ✗ $W_{new} = W_{old} + X^3;$

$t = 3, \quad W = [1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]; \quad X^1$ ✗ $W_{new} = W_{old} + X^1;$

$t = 4, \quad W = [2 \quad -2 \quad 0 \quad 0]; \quad X^2$ ✗ $W_{new} = W_{old} - X^2;$

مثال ۲

$$X_1 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad -1], \quad d^1 = 1$$
$$X_2 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1], \quad d^2 = -1$$
$$X_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad d^3 = 1$$



$t = 5, \quad W = [1 \quad -3 \quad 1 \quad 1]; \quad X^3$ ✗ $W_{new} = W_{old} + X^3;$

$t = 6, \quad W = [2 \quad 2 \quad -1 \quad 2]; \quad X^1$ ✗ $W_{new} = W_{old} + X^1;$

$t = 7, \quad W = [3 \quad -3 \quad 1 \quad 1]; \quad X^2$ ✓ $W_{new} = W_{old}$

$t = 8, \quad W = [3 \quad -3 \quad 1 \quad 1]; \quad X^3$ ✓ $W_{new} = W_{old}$

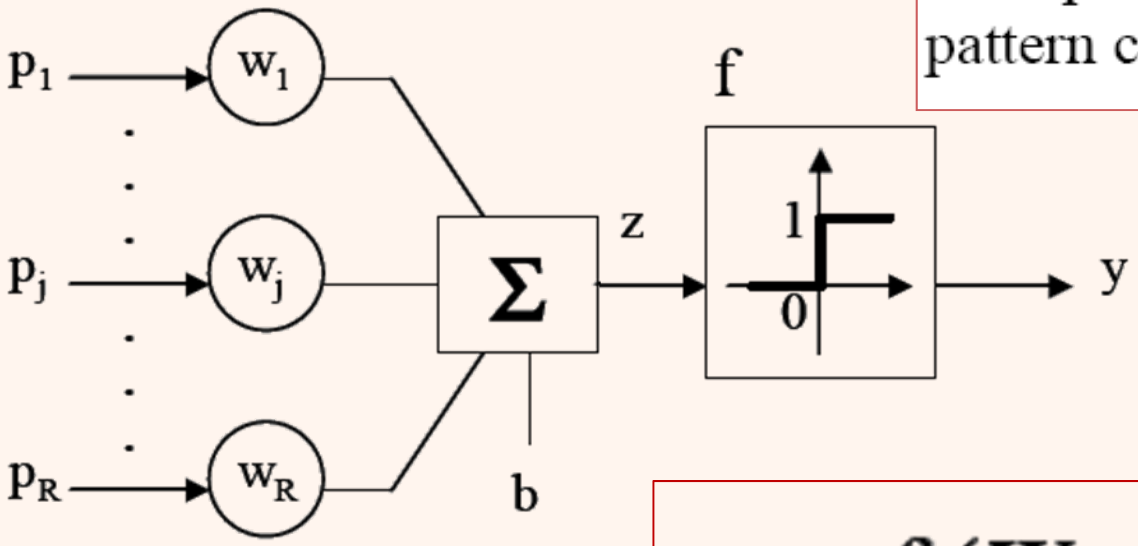
$t = 9, \quad W = [3 \quad -3 \quad 1 \quad 1]; \quad X^1$ ✓ $W_{new} = W_{old}$

جمع‌بندی

Frank Rosenblatt (1958), Marvin Minski & Seymour Papert (1969)

- پرسپترون نرونی است با تابع انگیزش دوسطحی که با توجه به قانون یادگیری (Learning rules) وزن‌ها و بایاس آن به روز می‌شود.

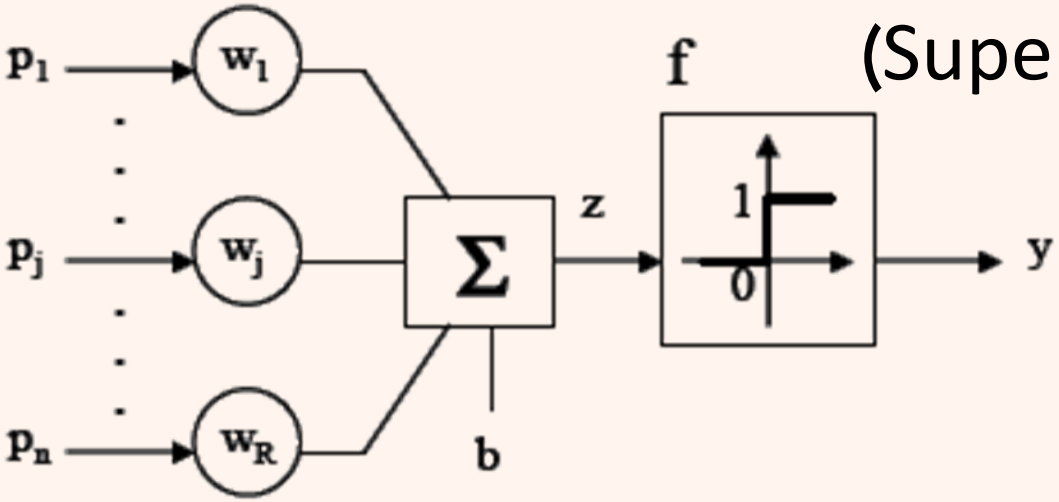
Perceptrons are well suited for pattern classification/recognition.



$$y = f(W \cdot p + b)$$

یادگیری پرسپترون

- بامعلم (Supervised)



$$p = (p_1, \dots, p_R)^T$$

$$W = (x_1, \dots, x_R)$$

اگر t خروجی مطلوب باشد برای خطا داریم:

$$e = t - y$$

if $e = 1$, then $W^{new} = W^{old} + p$, $b^{new} = b^{old} + 1$;

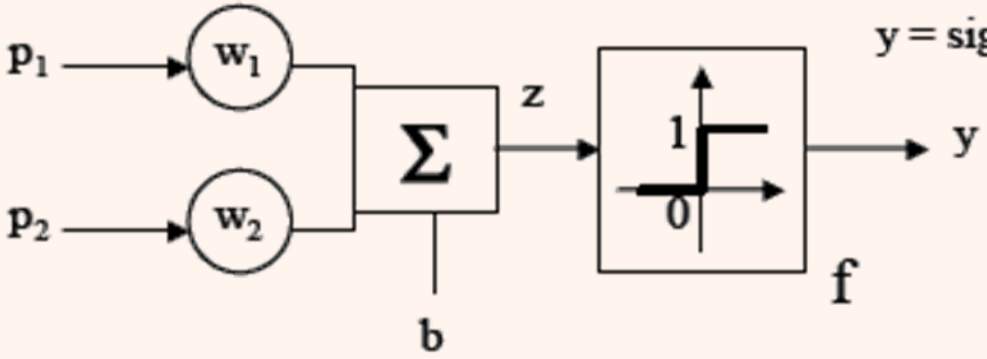
if $e = -1$, then $W^{new} = W^{old} - p$, $b^{new} = b^{old} - 1$;

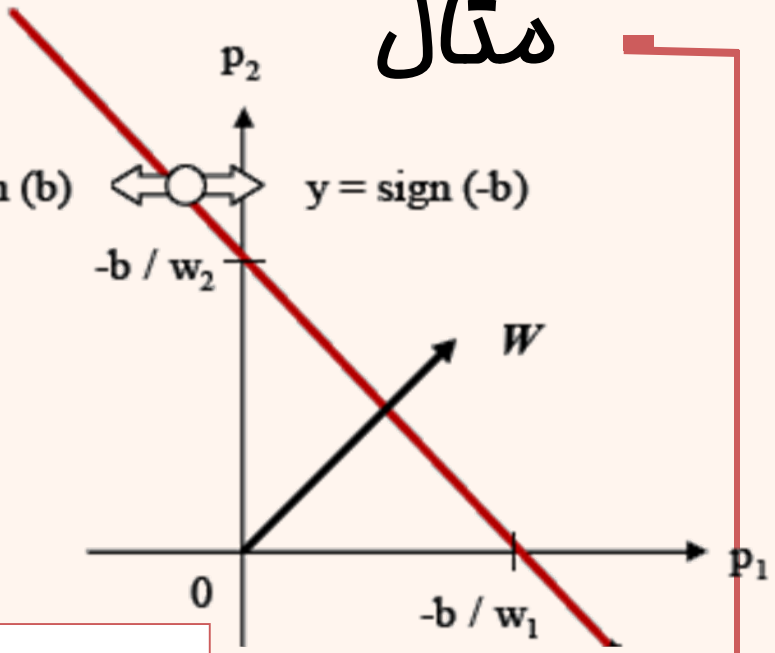
if $e = 0$, then $W^{new} = W^{old}$.

Perceptron learning rule

مثال

Two-Input Perceptron





$$y = hardlim\ (z) = hardlim\{ [w_1 , w_2] \cdot [p_1 , p_2]^T + b\}$$

$$w_1 \cdot p_1 + w_2 \cdot p_2 + b = 0$$

بردار مرز همواره بر بردار وزن عمود است

Convergence theorem

قضیه‌ی همگرایی

- در صورت که مجموعه وزن‌های W^* وجود داشته باشد که قابلیت جداسازی یک مجموعه‌ی محدود (جدایی‌پذیر خطی) را داشته باشد، قانون آموزش پرسپترون به یک پاسخ همگرا خواهد شد.
  - این پاسخ الزاما با W^* یکسان نخواهد بود.
  - تمام خروجی‌ها را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که خروجی مطلوب «۱+» شود.
  - وزن اولیه را صفر در نظر می‌گیریم.
  - بردار ورودی n-تایی است.

$$X^k = [1, x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k]$$

اثبات قضیه‌ی همگرایی

- هدف محاسبه‌ی حداکثر تعداد مراحلی است که وزن‌ها باید اصلاح شوند. با توجه به مفروضات

$$\forall k,\ \exists \delta \geq 0 \quad W^{*}.X^{k} \geq \delta,$$

- فرض کنید در مرحله‌ی $t+1$ نیاز به اصلاح وزن‌ها وجود دارد:

$$W_{(t+1)} = W_{(t)} + d_k X^k$$

$$W^{*}.W_{(t+1)} = W^{*}.W_{(t)} + W^{*} X^{k}$$

$$W^{*}.W_{(t+1)} \geq W^{*}.W_{(t)} + \delta \Rightarrow \boxed{W^{*}.W_{(t)} \geq t\,\delta}$$

اثبات قضیه‌ی همگرایی(ادامه ...)

$$\left\|W_{(t+1)}\right\|^2 = W_{(t+1)}W_{(t+1)}^T = \left[W_{(t)} + d_k X^k\right]\left[W_{(t)} + d_k X^k\right]^T$$

$$\left\|W_{(t+1)}\right\|^2 = \left\|W_{(t)}\right\|^2 + \left\|X^k\right\|^2 + 2W_{(t)}\left[X^k\right]$$

این مقدار منفی است

$$\left\|W_{(t+1)}\right\|^2 \le \left\|W_{(t)}\right\|^2 + \left\|X^k\right\|^2$$

(n+1)

$$\left\|W_{(t+1)}\right\|^2 \le \left\|W_{(t)}\right\|^2 + (n+1) \Rightarrow \left\|W_{(t)}\right\|^2 \le t(n+1)$$

اثبات قضیه‌ی همگرایی(ادامه ...)

$$W^{*}.W_{(t)} \geq t\delta$$

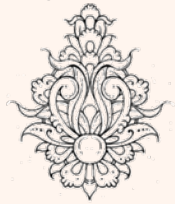
$$\cos(\theta) = \frac{W^{*}.W_{(t)}}{\|W^{*}\|\|W_{(t)}\|} \leq 1$$

$$\|W^{*}\|\|W_{(t)}\| \geq t\delta$$

$$\|W_{(t)}\|^2 \leq t(n+1)$$

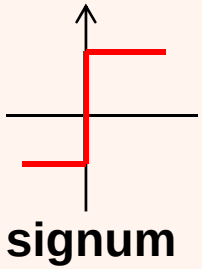
$$\|W^{*}\|\sqrt{t(n+1)} \geq t\delta$$

$$t \leq \frac{\|W^{*}\|^2 (n+1)}{\delta^2}$$



مثال

$$X_1 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad -1], \quad d^1 = 1$$
$$X_2 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1], \quad d^2 = -1$$
$$X_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad d^3 = 1$$



$$W^* = [3 \quad -3 \quad 1 \quad 1];$$

$$t \le \frac{\|W^*\|^2 (n+1)}{\delta^2}$$

$$t \le \frac{20 \times 4}{\delta^2}$$

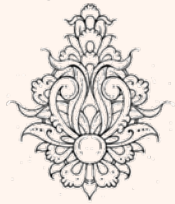
Widrow-Hoff

Widrow and his graduate student Hoff introduced ADALINE network and learning rule which they called the LMS(Least Mean Square) Algorithm.

- برای تولید وزن‌های جدید از تاثیر خطا استفاده می‌شود.

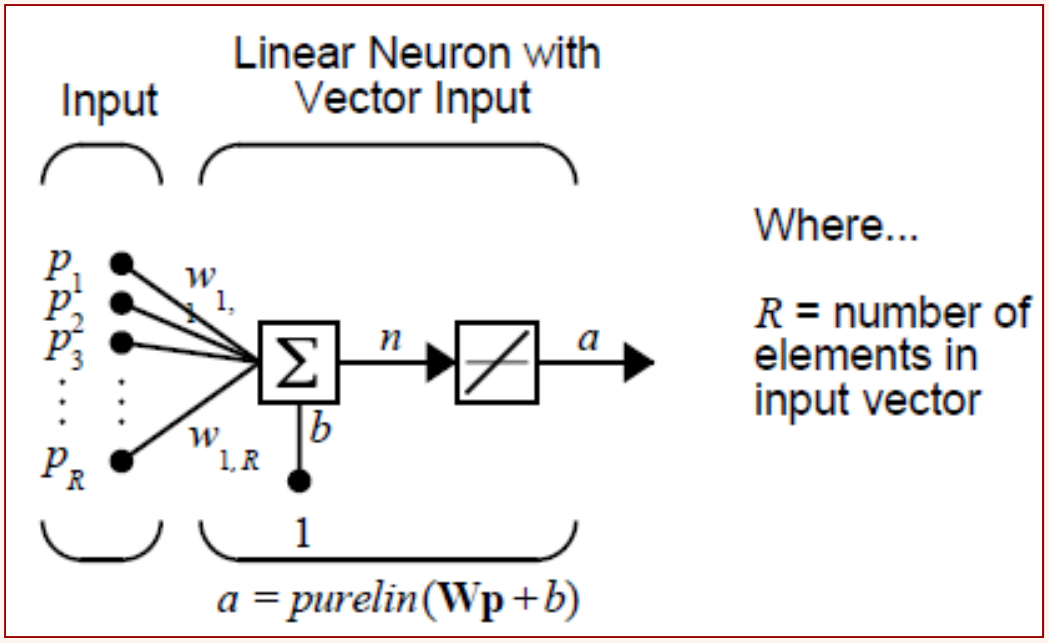
$$w_{new} = w_{old} + \Delta w$$

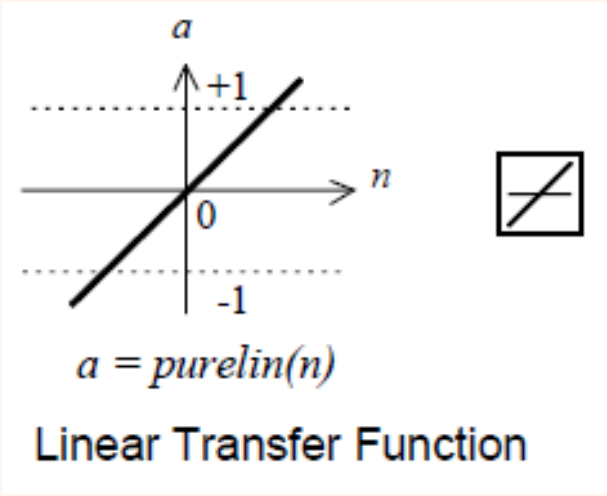
- در این شیوه میزان *به‌روزنمایی* متناسب با میزان خطا خواهد بود و در نتیجه همگرایی سریع‌تر صورت می‌گیرد.



Widrow-Hoff

- ADALINE همانند پرسپترون است تنها تابع آن به جای دوسطحی بودن (که مقادیر ۱ و ۱-(0) را به خود اختصاص می‌دهد) تابعی خطی است.
- ADALINE همانند پرسپترون می‌تواند مسائل جدایی‌پذیر خطی را حل کند.





Widrow-Hoff

$$W_{new} = W_{old} + \Delta W$$

خروجی مطلوب ورودی kام

خروجی واقعی در مرحله‌ی n به ازای ورودی kام

$$e_k(n) = d_k - y_k(n)$$

تغییر وزن‌ها در جهت افزایش خروجی ⟸ $e_k(n) > 0$

تغییر وزن‌ها در جهت کاهش خروجی ⟸ $e_k(n) < 0$

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \eta e_k(n) x_i^k$$

ضریب آموزش (یادگیری)

ادامه ...

- با فرض این که واحد خروجی دارای تابع فعالیت (انتقال) خطی باشد.
- به ازای n ورودی مساله را بررسی می‌کنیم.

$X^1 \xrightarrow{W(1)} y_1$ e_1 will be generated

$X^2 \xrightarrow{W(1)} y_2$ e_2 "

$X^3 \xrightarrow{W(1)} y_3$ e_3 "

.....

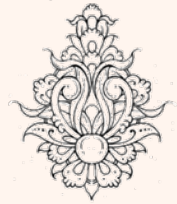
$X^n \xrightarrow{W(1)} y_n$ e_n "

$$E = \sum_{i=1}^{N} [e_i]^2$$

SSE

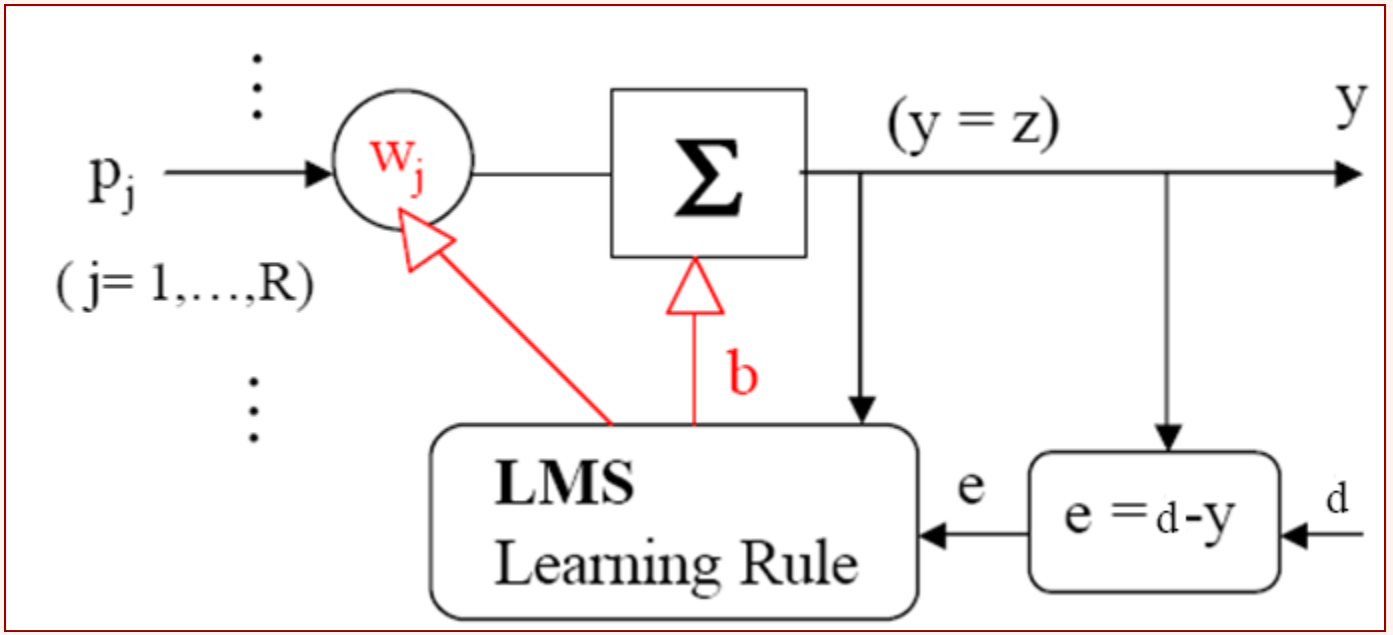
$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N} [e_i]^2}{N}$$

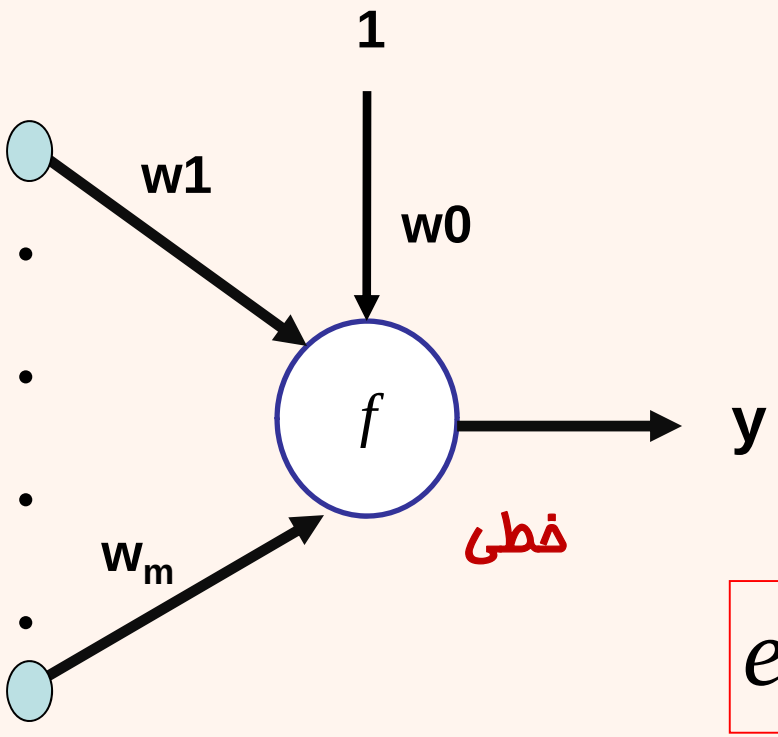
Mean SSE



Widrow-Hoff Learning Rule

- الگوریتم LMS وزن‌ها و بایاس را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که میانگین مربعات خطا (بین خروجی مطلوب و خروجی واقعی) سیستم را به حداقل برساند.





خطی

خطای به‌دست آمده به ازای ورودی X^k

$$e_k(n) = d_k - W(n)X^k$$

$$X^k = [1, x_1^k, \ldots\ldots, x_m^k]^T$$

$$\mathbf{X} = [X^1, X^2, \ldots\ldots, X^N]_{(m+1)\times N}$$

N ورودی m تایی

$$D = [d_1, d_2, \ldots\ldots, d_N]_{1\times N}$$

$$W = [w_0, w_1, \ldots\ldots, w_m]_{1\times(m+1)}$$

$$X^k = [1, x_1^k, \ldots\ldots, x_m^k]^T \qquad \mathbf{X} = [X^1, X^2, \ldots\ldots, X^N]_{(m+1)\times N}$$

$$D = [d^1, d^2, \ldots\ldots, d^N]_{1\times N} \qquad W = [w_0, w_1, \ldots\ldots, w_m]_{1\times(m+1)}$$

$$e_k(n) = d_k - W(n)X^k$$

Batch Mode

$$SSE = E(n) = \sum_{k=1}^{N} (d_i - W(n)X^k)^2$$

Number of epoch

$$E(n) = \| D - W(n)\mathbf{X} \|^2$$

Y(n)

$E\left(W_{(n)}\right)$ **پارامتر آزاد برای تابع خطا وزن‌ها هستند.**

$$Y(n) = [y_{1(n)}, y_{2(n)}, \ldots\ldots, y_{N(n)}]$$

کمینه کردن خطا

- باید به گونه‌ای عمل کرد که تابع خطا طی فرآیند آموزش کم‌تر شود:

$$E(n+1) < E(n) \quad \text{یا} \quad E(W_{(n+1)}) < E(W_{(n)})$$

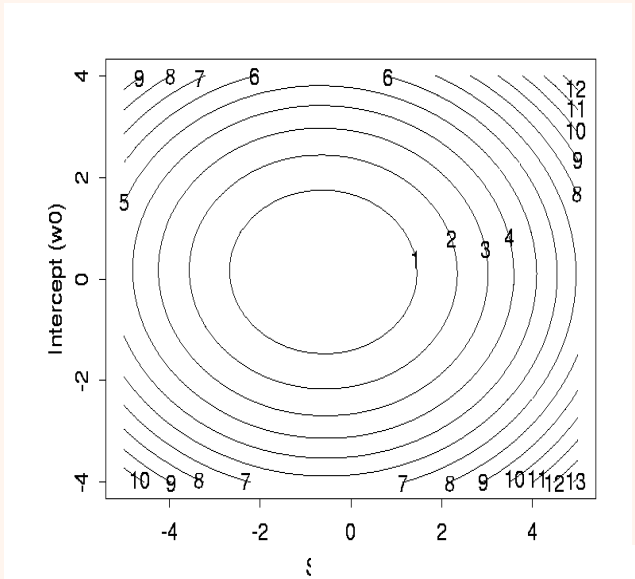
- هدف یافتن وزن بهینه‌ای است که به ازی آن تابع خطا(هزینه) مینیمم شود:

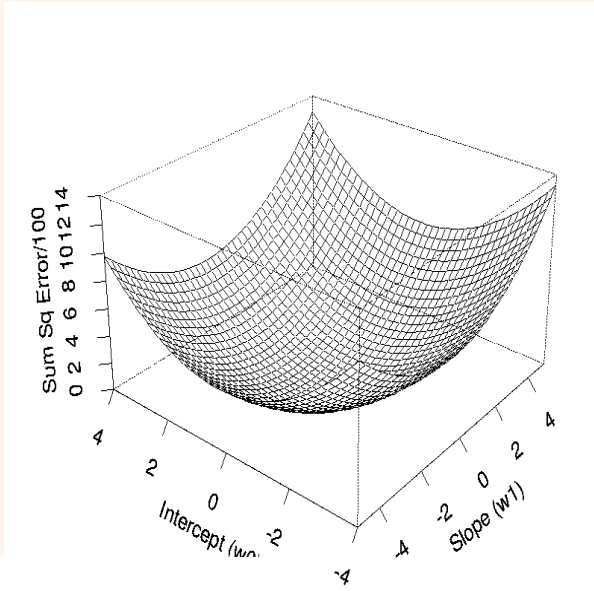
$$E(W^*) \leq E(W)$$

- شرط لازم برای وجود وزن بهینه این است که:

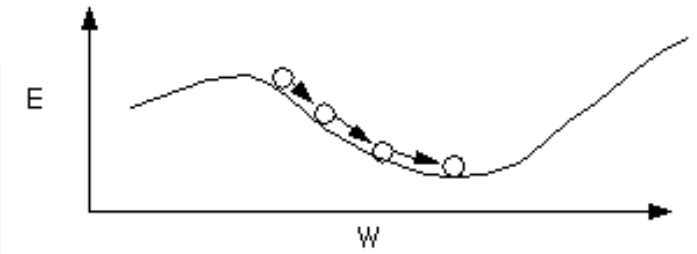
$$\nabla E\left(W^*\right) = 0$$

کمینه‌کردن خطا (Steepest descent)

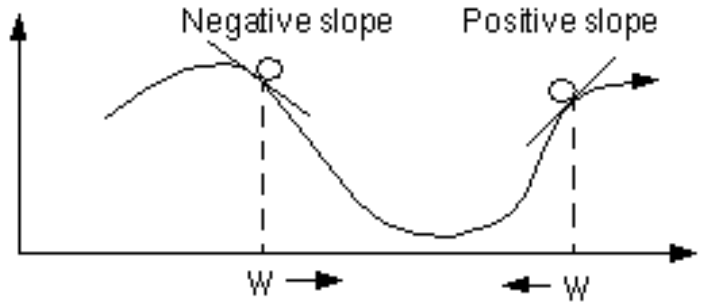




Delta rule



Slope of E positive
=> decrease W
Slope of E negative
=> increase W



- هدف به حداقل رساندن مقدار E یا S.S.E است

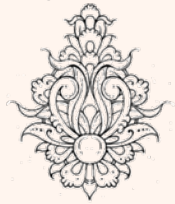
$$\nabla_w E_{(n)} = [\frac{\partial E(n)}{\partial w_0(n)}, \frac{\partial E(n)}{\partial w_1(n)}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial E(n)}{\partial w_m(n)}]$$

$$SSE = E(n) = \sum_{k=1}^{N} (d_k - W(n)X^k)^2$$

داشتیم

Batch Mode

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_i(n)} = -2\sum_{k=1}^{N} (d_k - y_k(n)) \frac{\partial y_k(n)}{\partial w_i(n)}$$



$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_i(n)} = -2\sum_{k=1}^{N}(d_k - y_k(n))\frac{\partial y_k(n)}{\partial w_i(n)}$$

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_i(n)} = -2\sum_{k=1}^{N}(d_k - y_k(n))x_i^k$$

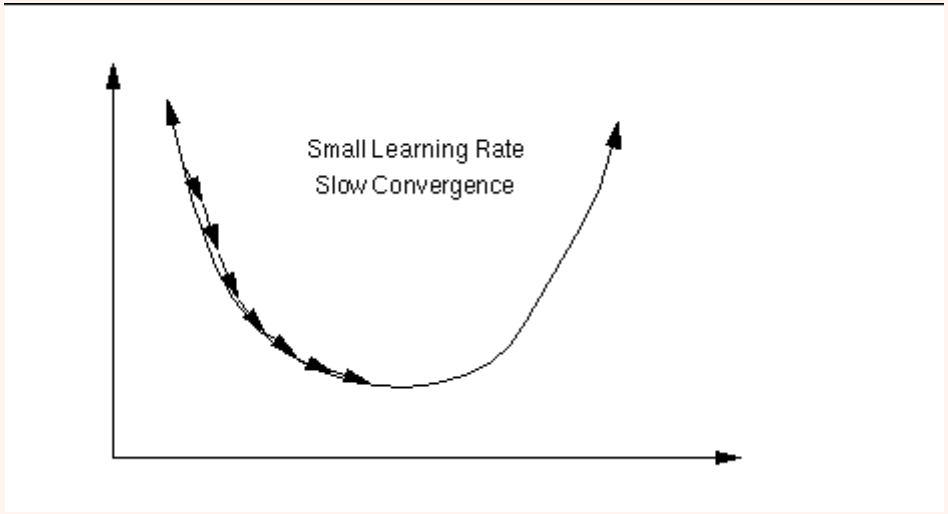
$$= -2(D - Y(n))\left[\mathbf{X}_i\right]^T \qquad \mathbf{X}_i = [x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^k]$$

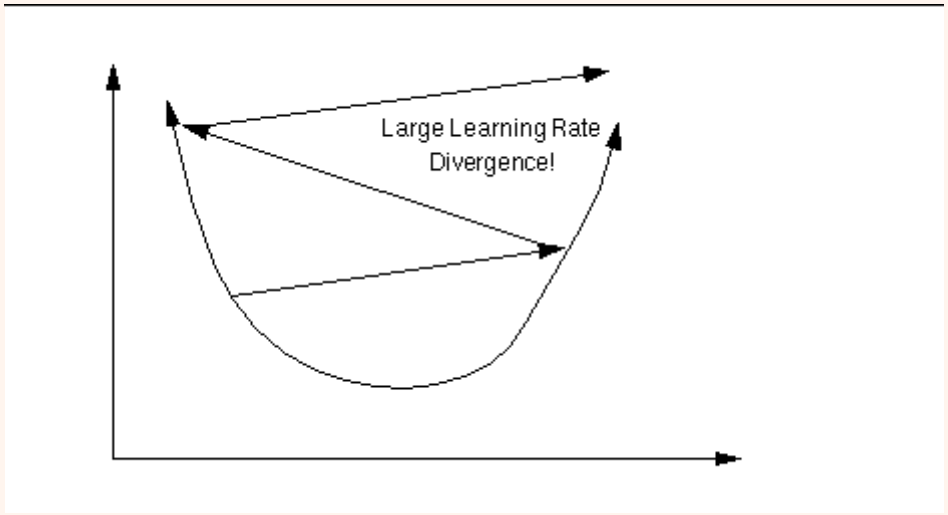
- برای انتخاب w مطلوب

$$w_i(n+1) = w_i(n) - \eta\frac{\partial E(n)}{\partial w_i(n)}$$

$$w_i(n+1) = w_i(n) + 2\eta(D - y(n))\left[\mathbf{X}_i\right]^T$$

تنظیم نرخ یادگیری





به دست آوردن محدوده نرخ آموزش

- نرخ آموزش «پایداری» و «سرعت همگرایی» را مشخص می‌کند.

با فرض تک اللو

$$E_{(t+1)} = \left\| D - W_{(t+1)} X \right\|^2$$

$$E_{(t+1)} = \left\| D - \left[W_{(t)} + \eta \left(D - Y_{(t)} \right) X^T \right] X \right\|^2$$

$$E_{(t+1)} = \left\| D - W_{(t)} X - \eta \left(D - Y_{(t)} \right) \| X \|^2 \right\|^2$$

$$E_{(t+1)} = E_{(t)} + \eta^2 \left\| D - Y_{(t)} \right\|^2 \left(\| X \|^2 \right)^2 - 2\eta \left\| \left(D - Y_{(t)} \right) \right\|^2 \| X \|^2$$

به دست آوردن محدوده نرخ آموزش(ادامه...)

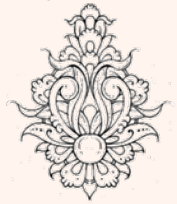
$$E_{(t+1)} = E_{(t)} + \eta^2 \left\| D - Y_{(t)} \right\|^2 \left(\| X \|^2 \right)^2 - 2\eta \left\| \left(D - Y_{(t)} \right) \right\|^2 \| X \|^2$$

$$E_{(t+1)} = E_{(t)} \left[1 + \eta^2 \left(\| X \|^2 \right)^2 - 2\eta \| X \|^2 \right]$$

$$E_{(t+1)} = E_{(t)} \left[1 - \eta \| X \|^2 \right]^2$$

$$\frac{E_{(t+1)}}{E_{(t)}} = \left[1 - \eta \| X \|^2 \right]^2 < 1$$

$$-1 < 1 - \eta \| X \|^2 < 1$$



به دست آوردن محدوده نرخ آموزش(ادامه...)

$$-1 < 1 - \eta \left\| X \right\|^2 < 1$$

$$0 < \eta \left\| X \right\|^2 < 2$$

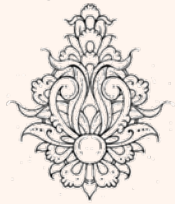
$$0 < \eta < \frac{2}{\left\| X \right\|^2}$$

$$0 < \eta < \frac{2}{\max_k \left\| X^k \right\|^2}$$

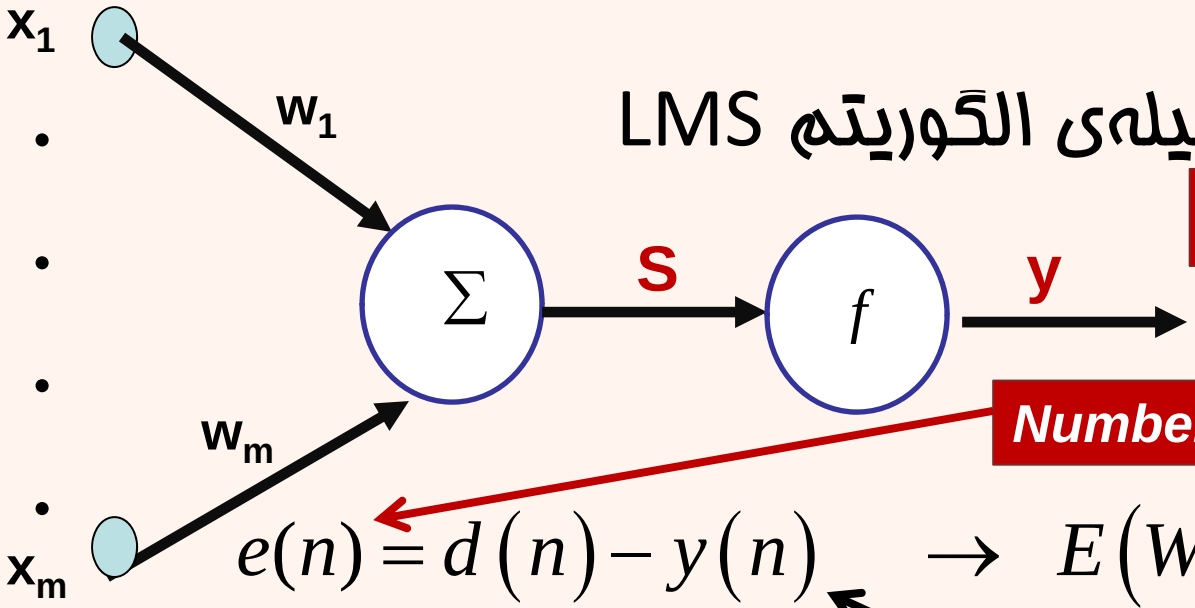
نامناسب

$$\frac{0.1}{\max_k \left\| X_k \right\|^2} < \eta < \frac{2}{\max_k \left\| X^k \right\|^2}$$

به صورت تجربی



تک لایه تک واحد با تابع غیر خطی



- حل به وسیله‌ی الگوریتم LMS

Sequential Mode

Number of iteration

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad \rightarrow \quad E(W(n)) = \frac{1}{2} e^2(n)$$

خروجی به ازای ورودی در تکرار nام

$$w_k(n+1) = w_k(n) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_k}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial e^2}{\partial w_k} = e\frac{\partial e}{\partial w_k} = e\frac{\partial e}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w_k}$$

$$= e\frac{\partial e}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial w_k}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_k} = e\frac{\partial e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w_k}$$

-1

$$y = f(s) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial s} = f'(s) \qquad x_k$$

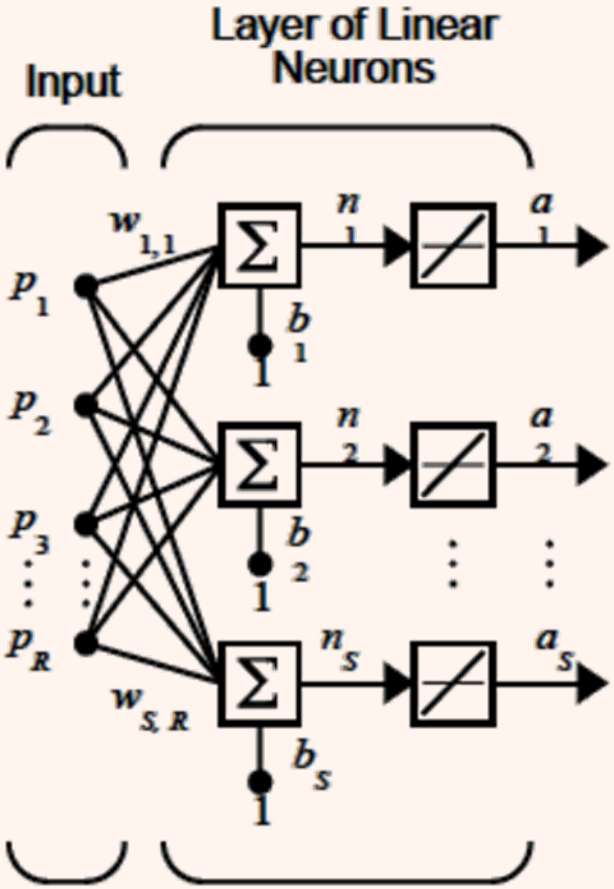
$$= -ef'(s)x_k$$

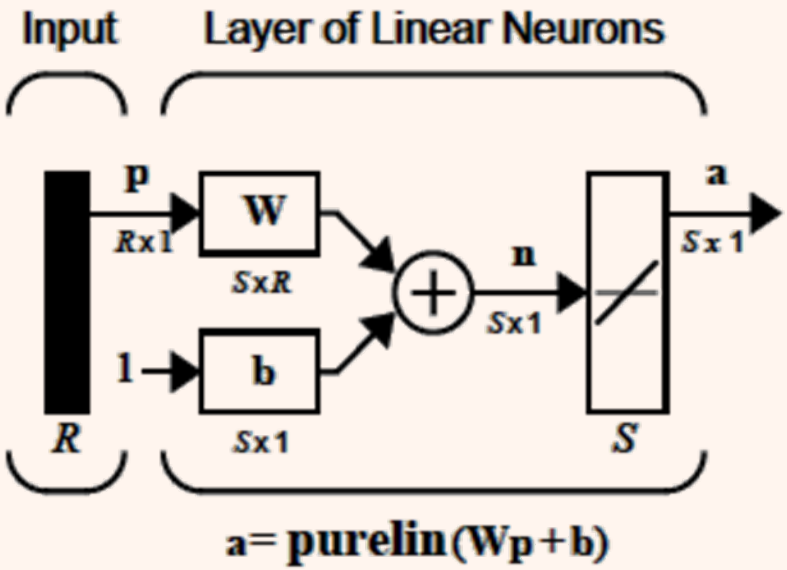
تابع می باید مشتق پذیر باشد

$$w_k(n+1) = w_k(n) + (d - y(n))\, x_k$$

بسته به تابع f متفاوت است

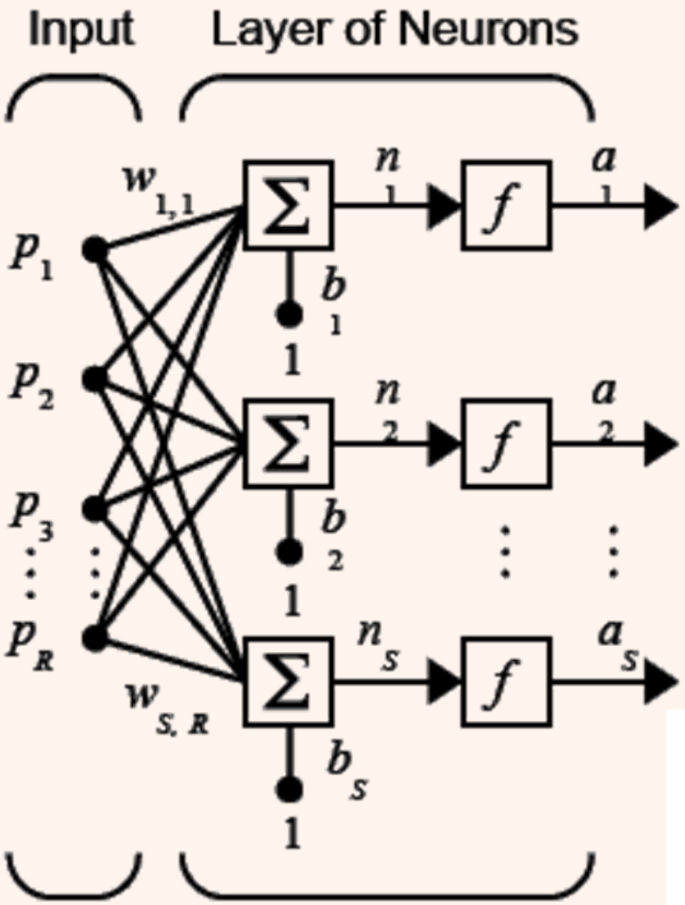
Single-Layer Linear Network





Where... R = numberof elements in input vector

S = numberof neurons in layer



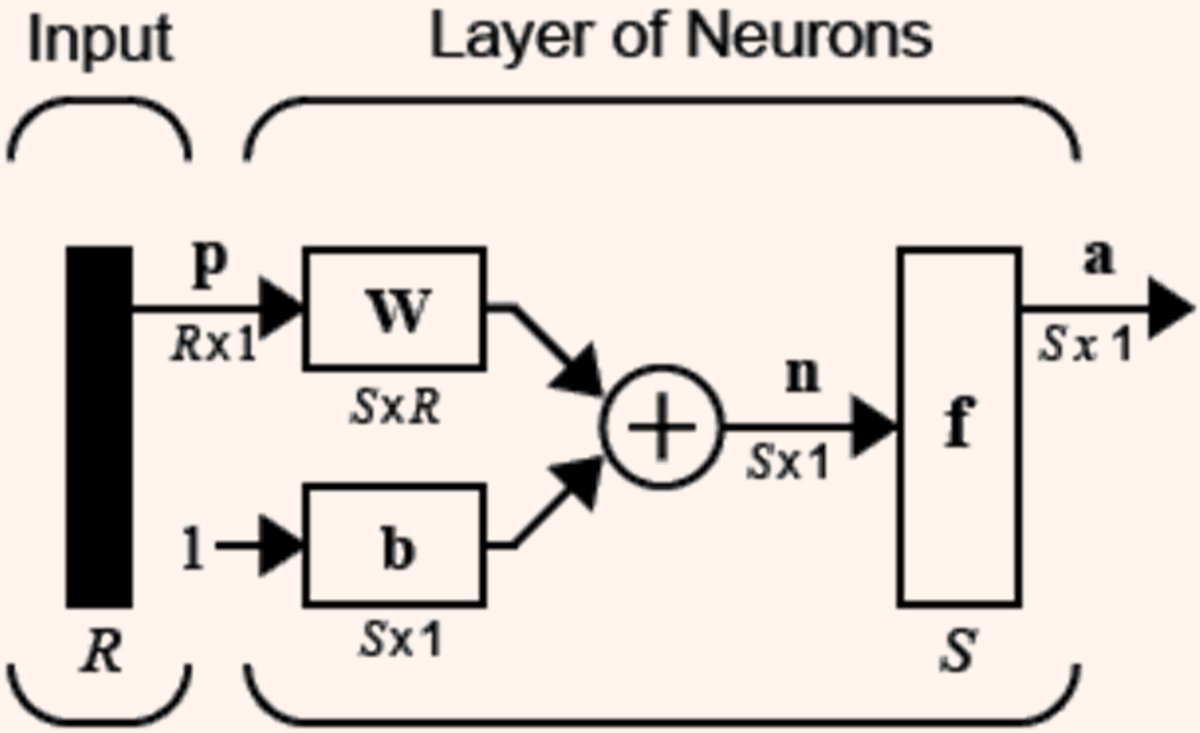
R تعداد المان های ورودی

S تعداد نرون های موجود در یک لایه

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{W}\mathbf{p} + \mathbf{b})$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,R} \\ & & & \\ w_{S,1} & w_{S,2} & \cdots & w_{S,R} \end{bmatrix}$$

شمای شبکه‌ی قبل به اختصار



$$a = f(Wp + b)$$

MATLAB

مثال

- می‌خواهیم پنج داده‌ی زیر را که خروجی‌های مطلوب آن‌ها نیز مشخص است را در دو کلاس طبقه‌بندی کنیم:

```
P1=[0.7,0.2];
T1=[1];
```

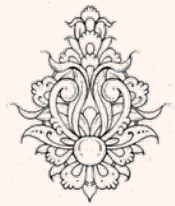
```
P2=[-0.1,0.9];
T2=[1];
```

```
P3=[-0.3,0.3];
T3=[0];
```

```
P4=[0.1,0.2];
T4=[0];
```

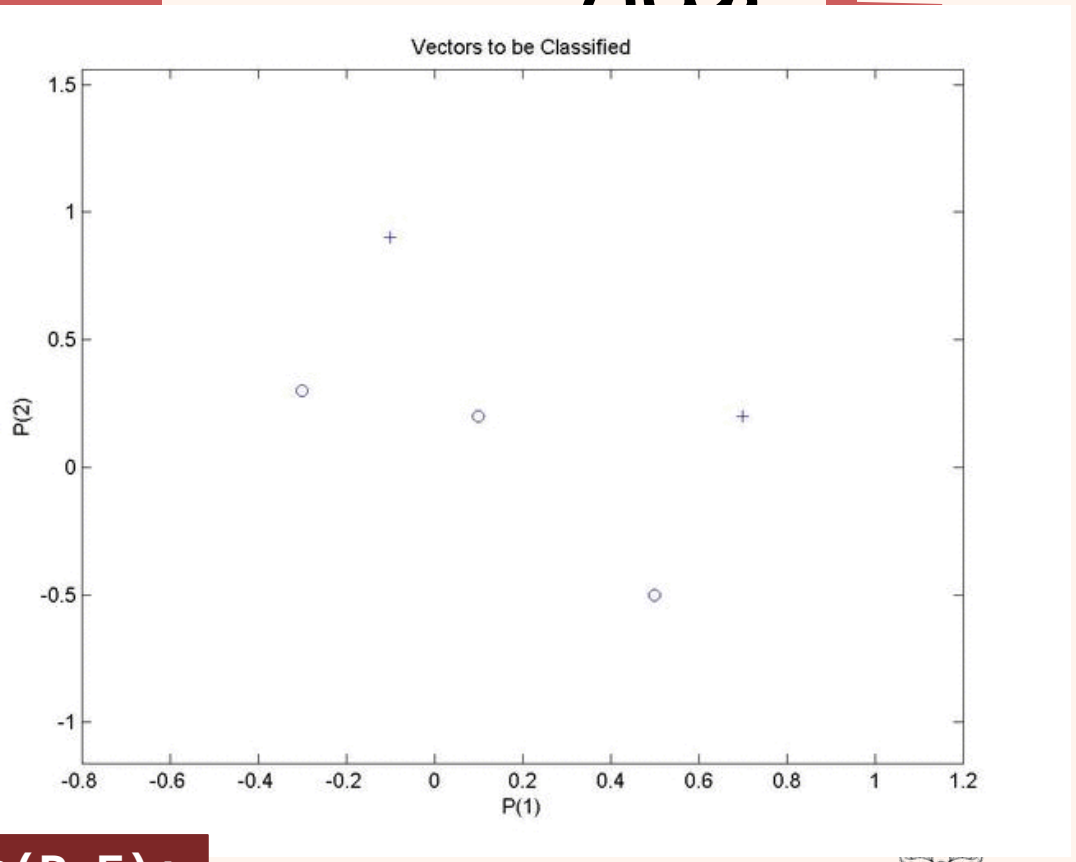
```
P5=[0.5,-0.5];
T5=[0];
```

```
P=[0.7 -0.1 -0.3 0.1 0.5;
     0.2 0.9 0.3 0.2 -0.5];
T=[1 1 0 0 0];
```



```
P=[0.7 -0.1 -0.3 0.1 0.5;
   0.2 0.9 0.3 0.2 -0.5];
T=[1 1 0 0 0];
W=[0 0];
b=-1;
plotpv(P,T);
plotpc(W,b);
nepoc=0
Y=hardlim(W*P+b);
while any(Y~=T)
    Y=hardlim(W*P+b);
    E=T-Y;
    dW=E*P';
    db=sum(E);
    W=W+dW;
    b=b+db;
    nepoc=nepoc+1;
    disp('epochs='),disp(nepoc),
    disp(W), disp(b);
    plotpv(P,T);
    plotpc(W,b);
end
```

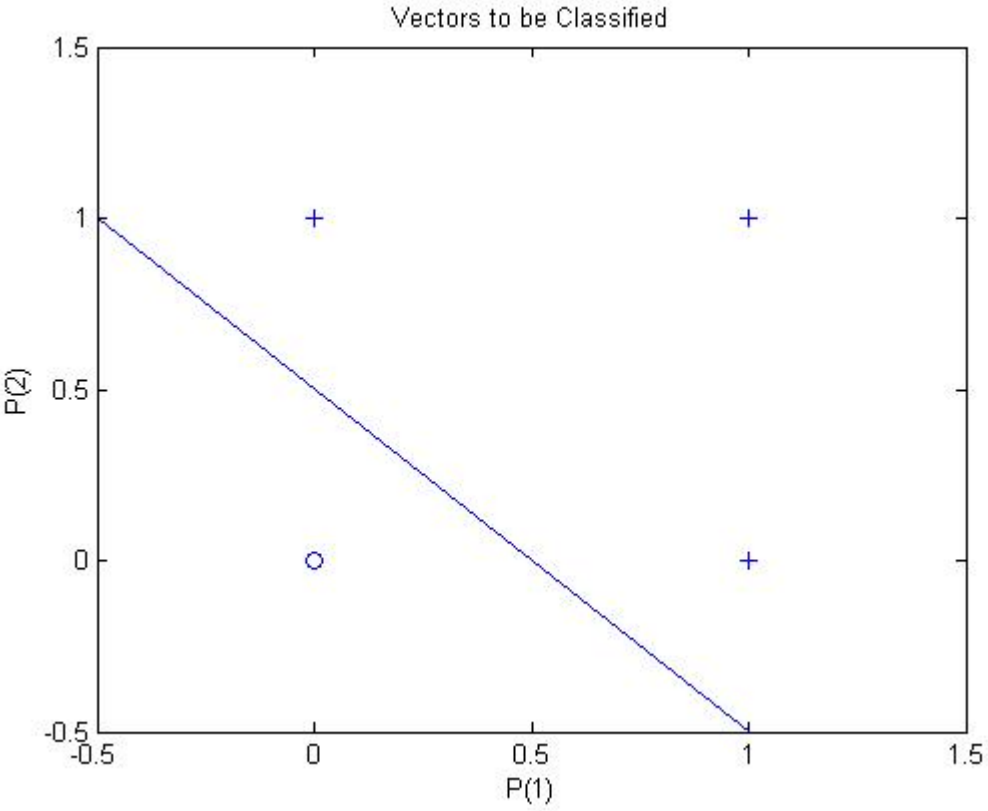
```
[dW,db]= learnp(P,E);
```



Epoch=9

W1=2.7 W2=2.9
B=-2

OR

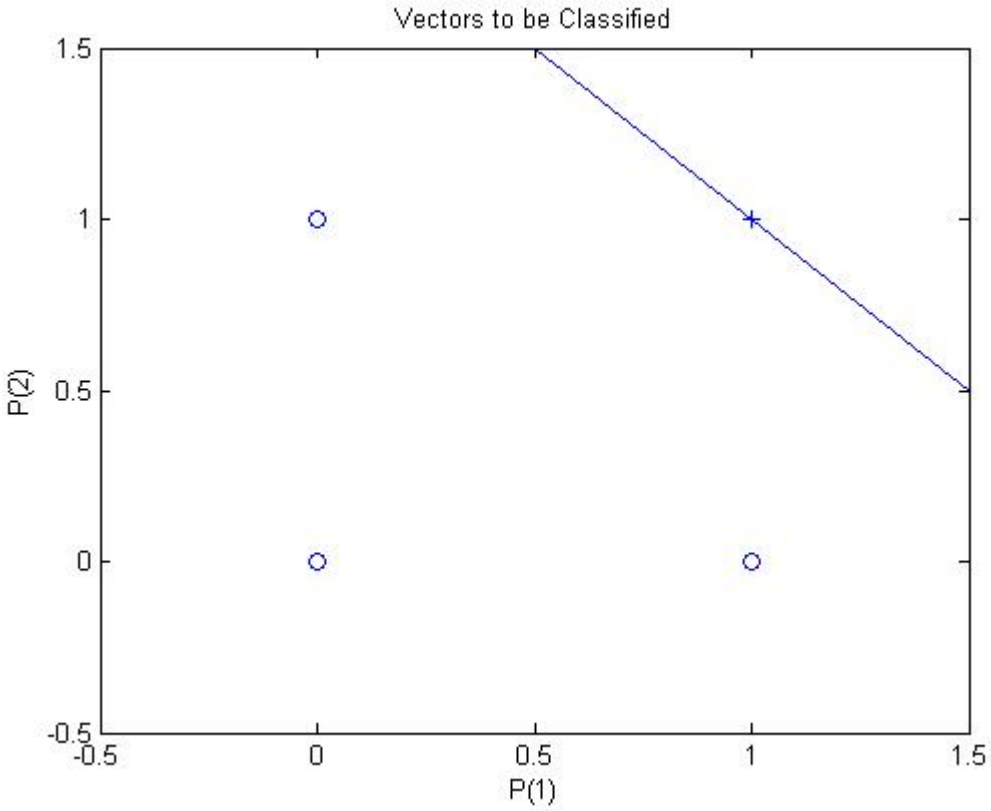


Epochs= 5

W1=2 W2= 2

b= -1

AND

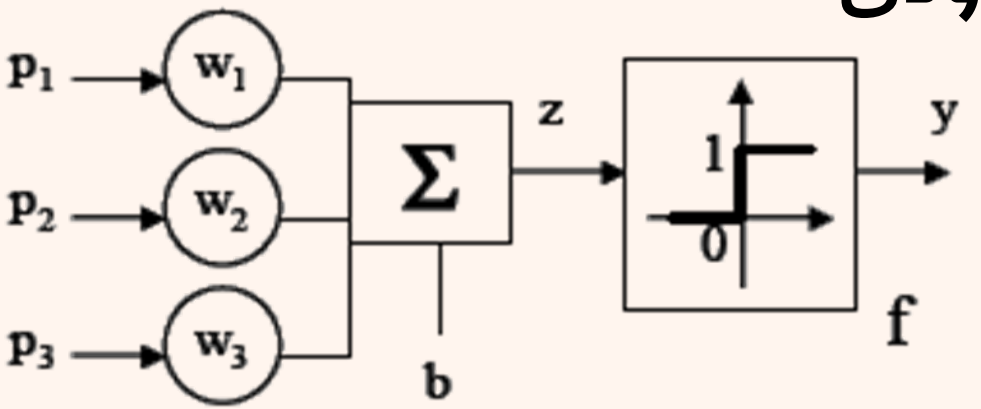


epochs= 4

W1=1 w2= 1

b= -2

پرسپترون سه ورودی



$$y = \text{hardlim}(z) = \text{hardlim}([w_1, w_2, w_3].[p_1, p_2, p_3]^T + b)$$

epochs=
3

w1= 3 w2= -3 w3= 3

b=0